GEOMETRÍAS PURA Y APLICADA DESDE EL ENFOQUE SINTÁCTICO-AXIOMÁTICO DE LAS TEORÍAS

RESUMEN

En este artículo se traza una distinción clara y precisa entre geometría pura y geometría aplicada dentro del marco de las reflexiones sobre los fundamentos de la geometría promovidas por la aparición de geometrías no-euclidianas y en el contexto de las discusiones mantenidas por los empiristas lógicos sobre la estructura general de las teorías empíricas. De manera más particular, se defiende, tal y como proponen los empiristas lógicos, que una geometría pura es un sistema formal que no nos dice nada sobre la realidad física, mientras que una geometría aplicada es una teoría empírica, una teoría física (una teoría del espacio) que resulta de dotar de significado a una geometría matemática. Para sostener esta tesis se recurre, en parte, a ciertas ideas expresadas por Einstein sobre la teoría general de la relatividad. Por último, si bien parece que esta imagen de la estructura de una geometría física es relativamente adecuada, se insiste en la tesis de que el error principal de los empiristas lógicos estaría entonces en pretender hacer de ella el carácter predominante de la estructura de las teorías científicas en general.

PALABRAS CLAVE

Geometría pura, geometría aplicada, positivismo lógico, relatividad y teoría.

ABSTRACT

In this paper I draw a clear and precise distinction between pure or mathematical geometry and applied or physical geometry. I make this distinction inside two contexts: one, the reflections about foundations of geometry due to the source of non-Euclidean geometry and, other one, the discussions by the logical positivists on general structure of empirical theories. In particular, such and like propose the logical positivists, I defend that pure geometry is a formal system that doesn't tell us anything about physical reality, whereas applied geometry is a theory about physical space that comes of to interpret a mathematical geometry. I support this thesis in some Einstein's ideas about the general theory of relativity. Finally, even though this picture of structure of physical geometry is relatively appropriate, I insist on the thesis of that main mistake of logical empiricist philosophy would be in making of this picture the dominant character of structure of scientific theories in general.

KEY WORDS

Pure geometry, applied geometry, logical positivism, relativity and theory.

GEOMETRÍAS PURA Y APLICADA DESDE EL ENFOQUE SINTÁCTICO-AXIOMÁTICO DE LAS TEORÍAS[*][✡]

Germán Guerrero Pino[**]

1. INTRODUCCIÓN

En este artículo se traza una distinción clara y precisa entre geometría pura y geometría aplicada a partir de las reflexiones sobre los fundamentos de la geometría –promovidas por la aparición de geometrías no-euclidianas– y en el contexto de las discusiones mantenidas por los empiristas lógicos sobre la estructura de las teorías empíricas. Se defiende entonces que una geometría pura es un sistema formal que no nos dice nada sobre la realidad física, mientras que una geometría aplicada o física es una teoría empírica, una teoría física (una teoría del espacio) que resulta de dotar de significado a una geometría matemática.

En segundo lugar, y a partir de la distinción entre geometría pura y geometría aplicada, se argumenta que la siguiente tesis de los empiristas lógicos es bastante plausible: una geometría física GF no es más que una geometría pura GP más una serie de interpretaciones I (GF = GP + I). La plausibilidad de la misma se justifica en parte con las ideas expresadas por A. Einstein en este tema.

En tercer lugar se insiste en la tesis de que si bien parece que esta imagen de la estructura de una geometría física es relativamente ade-

---

* Los distintos resultados de este artículo se inscriben dentro de una investigación más general que vengo adelantado bajo el título «Problemas en torno a la dicotomía teoría/observación».

✡ Una versión anterior de este artículo la presenté en *Segunda Escuela Latino americana de Historia y Epistemología de las Matemáticas*, Temática: *Historia de las geometrías*, Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle, 23-26 noviembre de 2004.

** Universidad del Valle.

cuada, el error principal del enfoque sintáctico-axiomático promovido por los empiristas lógicos estaría entonces en pretender hacer de ella el carácter predominante de la estructura de las teorías científicas; en otras palabras, en extrapolar a todas las teorías empíricas un esquema que funciona relativamente bien en la geometría física.

Para lograr todo esto se comienza por hacer una caracterización muy general de la concepción empirista lógica de las teorías científicas, para después establecer la distinción entre las geometrías pura y aplica en el marco de la aparición de las geometrías no-euclídeas, y su significación. Finalmente, se expone lo que es una geometría física. En cada una de estas partes se hace una clarificación formal de las distintas nociones involucradas y se presentan ilustraciones que ayudan a una mejor comprensión de las mismas y de las ideas generales que se desarrollan.

2. CARACTERIZACIÓN DEL ENFOQUE[1]

El enfoque sintáctico-axiomático de las teorías empíricas fue desarrollado en la década de los treinta del siglo pasado, principalmente por el positivismo lógico o empirismo lógico, en manos de filósofos de la ciencia como Moritz Schlick, Hans Reichenbach, Rudolf Carnap, Ernest Nagel, Carl G. Hempel y otros. Este enfoque dominó el análisis de las teorías en la filosofía de la ciencia durante las siete primeras décadas del siglo pasado, pero aún persiste entre muchos filósofos y hombres de ciencia. Además, hay que tener presente que con los empiristas lógicos la filosofía de la ciencia adquiere el carácter de disciplina autónoma, de modo que Schlick, Reichenbach y Carnap pueden ser considerados los padres de nuestro campo de trabajo.

Podríamos decir que el enfoque sintáctico representa la expresión más acabada (extrema o radical, según se quiera ver) de aquel viejo ideal de sistematización de la ciencia, en el que las teorías adquieren una forma rigurosa al ser presentadas como sistemas axiomáticos. Este

1 He hecho una exposición más detallada de este tema en Guerrero [2001] y Guerrero [2002].

ideal de sistematización busca que el cuerpo de conocimiento de la naturaleza esté articulado y tenga un carácter sistemático partiendo de un número reducido de conceptos para después relacionarlos entre sí, de lo cual se obtienen leyes. En últimas, es este tipo de trama lo que concebimos como una teoría, como la forma más elaborada de conocimiento sobre un ámbito de la realidad.

Esta forma particular y muy elaborada de pensar las teorías tiene sus orígenes en el desarrollo mismo del pensamiento griego, en concreto, en el libro *Elementos* de Euclides (330-275 a. C.), y se consolidó al mismo tiempo que lo hacía la ciencia moderna en manos principalmente de Newton, concretamente en su libro *Principios matemáticos de la filosofía natural* (1687), y dominó tanto la actividad científica como la reflexión filosófica hasta mediados del siglo XX. Por tanto, esta concepción en su forma general aún sigue considerándose como una respuesta viable a qué es una teoría científica, y de hecho podríamos decir que es la concepción dominante tanto en la ciencia como en la filosofía de la ciencia.

El punto de partida del positivismo lógico consistía en pretender conectar todos los enunciados de la ciencia con *lo directamente dado*, con la *experiencia directa*[2]. Por una parte, se tiene que no todos los enunciados empíricos son directamente verificables en la experiencia y, por otra, no es posible que las palabras y enunciados empleados en las ciencias empíricas obtengan sus significados o se hagan significativas a través de definiciones explícitas, a la manera como se procede en los sistemas formales mediante el método axiomático, puesto que caeríamos en un *regressus ad infinitum* al buscar el significado de las palabras y enunciados componentes de la definición inicial. Para evitar tal *regressus* debe haber un grupo de enunciados cuyo significado está directamente dado por la experiencia, y a partir de los cuales sea posible derivar el resto de ellos.

Actualmente contamos con una caracterización del enfoque sintáctico que podríamos calificar de estándar, dada su gran aceptación

2 En Guerrero [1997] me he ocupado más afondo del tema.

por parte de los filósofos de la ciencia[3]. De acuerdo con ésta, desde el enfoque sintáctico se conciben las teorías científicas como *cálculos formales* o *sistemas formales* axiomáticos parcialmente interpretados mediante reglas de correspondencia que relacionan términos teóricos con términos observacionales[4]. Si queremos desglosar más lo anterior, podemos decir que los siguientes tres presupuestos fueron determinantes para intentar llevar a feliz término este programa: (1) las teorías empíricas son teorías matemáticas más una interpretación; (2) el lenguaje científico está compuesto por dos partes: una observacional y otra teórica; (3) no es problemático dar razón del porqué los términos observacionales son significativos, mientras que sí lo es en el caso de los teóricos.

Las principales características enunciadas arriba pueden verse de un modo claro en las siguientes palabras de Carnap, a quien podemos considerar como uno de los principales proponentes y defensores del enfoque sintáctico-axiomático: «El método descrito respecto a la geometría se puede aplicar igualmente a cualquier otra parte de la física: podemos construir en primer lugar un cálculo y después establecer la interpretación deseada en la forma de reglas semánticas que aportan una teoría física como un sistema interpretado con contenido factual»[5].

En otras palabras, la idea clave de la concepción sintáctica es que una teoría empírica consta fundamentalmente de dos partes: un *sistema formal*, en el sentido de los lógicos y los matemáticos, y cierto mecanismo que relaciona este sistema con el mundo natural.

---

3 Véase por ejemplo, Putnam [1962], p. 312; Suppes [1967], p. 56; van Fraassen [1970], p. 337; y Suppe [1974], pp. 35-36 y 70-73, considerado como el estudio más completo, en profundidad y amplitud, de este enfoque.

4 Considero escritos representativos de este enfoque (mas no los únicos), en los que de una u otra forma se implementa esta manera de analizar, en unos casos, y de reconstruir, en otros, las teorías empíricas, los siguientes: Carnap: *Foundations of Logic and Mathematics* (1939), *The Methodological Character of Theorical Concepts* (1956), *Philosophical Foundations of Physics* (1966), caps. 23-28; Ramsey, *Theories* (1931); Reichenbach, *The Philosophy of Space and Time* (1928), pp.14-19; Nagel, *The structure of Science* (1961), cap. V; Hempel, *Theoretician's Dilemma* (1958) y *Implications of Carnap's Work for the Philosophy of Science* (1963).

5 Carnap [1939], p. 309.

El sistema formal está compuesto por conceptos primitivos, conceptos derivados y, en general, enunciados teóricos, en tanto que el nivel observacional corresponde a la experiencia directa que se tiene del mundo, y contiene los conceptos empíricos que están vinculados de un modo directo con la experiencia, y cuya composición proporciona enunciados observacionales. Los dos niveles, el formal y el observacional, están conectados mediante el mecanismo de *reglas de correspondencia* que relaciona los conceptos primitivos o definidos con los conceptos empíricos, de modo que en este sentido estas reglas son enunciados teórico-observacionales, contienen una parte teórica y otra empírica.

Las reglas de correspondencia garantizan el carácter empírico de la teoría, ya que sin ellas nos quedaríamos prácticamente con una teoría matemática o un sistema lógico. Es decir, una teoría empírica no puede reducirse a sólo un sistema formal, precisamente porque una teoría empírica habla del mundo, y como tal, sus componentes o el todo en su conjunto debe tener una significación empírica. De ahí que para los partidarios de esta concepción sintáctica, la función principal de las reglas de correspondencia sea la de llenar este vacío empírico presente en un sistema formal.

Por tanto, y en pocas palabras, esta concepción pensó las teorías empíricas al estilo como se pensaba en su momento la construcción de la lógica y la matemática, desde un enfoque puramente formal de los sistemas axiomáticos, en el que los elementos del sistema quedan indeterminados mientras no se haga una interpretación o se proponga una aplicación de ellos, y en el cual las cuestiones pertinentes son clarificar si el sistema es lógicamente consistente, y si determinado enunciado es derivable (deducible) en el sistema[6].

---

6 Digo "en su momento", haciendo referencia especialmente al método axiomático o a la metamatemática de David Hilbert en su sentido restringido: como teoría de la demostración. El término *metamatemática* fue introducido por Hilbert, aunque antes Bertrand Russell ya había hablado de metageometría en *Ensayos sobre los fundamentos de la geometría* (1897). D. Hilbert implementa el método axiomático en *Fundamentos de la geometría* (1899). Para el método axiomático de Hilbert ver Hilbert [1917] y para un sentido más amplio de la metamatemática ver, por ejemplo, Tarski [1940], pp. 171-173.

3. GEOMETRÍA PURA

Este tipo de reconstrucción de las teorías, presente en la concepción sintáctica, jugó un gran papel en las discusiones filosóficas sobre los fundamentos de la geometría por parte de los positivistas lógicos, especialmente en Reichenbach y Carnap. Así, por ejemplo, Carnap plantea que «la geometría matemática y la geometría física son excelentes paradigmas de dos maneras fundamentalmente diferentes de obtener conocimiento; la apriorística y la empírica»[7]. Con lo cual se está afirmando, entre otras cosas, que la geometría física no sólo representa el paradigma de la física, sino el de las ciencias empíricas en general. De esta forma, los empiristas lógicos asumieron que el esquema anterior de la estructura de una teoría era aplicable a cualquier teoría científica o empírica, pero lo cierto es que este esquema lo derivaron directamente del estudio de los fundamentos de la geometría, y una vez relativamente bien justificado en este campo, lo hicieron extensivo a las teorías empíricas en general sin mayores análisis sobre su adecuación a teorías empíricas particulares, como por ejemplo la mecánica cuántica.

A partir de estas investigaciones sobre los fundamentos de la geometría se llegó a distinguir de un modo claro y preciso entre geometría pura (matemática) y geometría aplicada (física), no alcanzada hasta entonces. Por tanto, las tesis que se quieren sostener aquí son: la distinción geometría pura/aplicada está correctamente establecida (de modo que se darán los argumentos pertinentes a favor de la distinción); la estructura propuesta por los empiristas lógicos para una geometría física es bastante plausible (igualmente se presentarán argumentos que apoyan esta idea); y finalmente se presenta la idea, sin mayor justificación, de que si bien la imagen de las teorías propuesta por los empiristas lógicos se adecua relativamente bien a la geometría física, un error clave del enfoque sintáctico estaría entonces en pretender hacer de ella el carácter predominante de la estructura de las teorías científicas[8].

7 Carnap [1966], p. 171.

8 Actualmente, y desde más o menos principio de los sesenta, existe el enfoque semántico

El origen de la distinción entre geometría pura y física está relacionado directamente con la aparición de geometrías no-euclídeas, que a su vez tiene que ver con la larga e interesante historia del problema del quinto postulado de la geometría de Euclides, el así llamado postulado[9] de las paralelas, que en un lenguaje moderno corresponde a: por un punto exterior a una recta pasa *una y sólo una* paralela a dicha recta.

Los *Elementos* de Euclides (330-275 a. C.) se abren con 23 definiciones, en las que se definen la mayoría de los conceptos básicos, cinco postulados y cinco ideas comunes. Los postulados se ocupan expresamente de los conceptos (términos o definiciones) que los preceden. A continuación aparecen estos cinco postulados en un lenguaje un tanto moderno y tal como se encuentran en la traducción que hace Federico Enriques del texto griego (en la edición crítica de Heiberg)[10]:

1-2

Se pide: que de cualquier punto se pueda conducir una recta a todo otro punto.

Y que, toda recta limitada, se pueda prolongar indefinidamente *por derecho*.

---

de las teorías como un enfoque alternativo al sintáctico-axiomático. De estas cuestiones me he ocupado en Guerrero [2004], Guerrero [2002] y Guerrero [2001].

9 Siguiendo el estudio de Federico Enriques [1924], pp. 35 y 39, empleo el término 'postulado' (que actualmente hacemos equivalente a 'axioma') y no 'axioma', porque esta última expresión se emplea en los *Elementos* de Euclides como equivalente a "noción común", que no es lo mismo que axioma en sentido moderno. Hay que tener presente que para los griegos, por una parte, los conceptos (términos o definiciones) geométricos «tienen un significado *real* antes que *nominal*, esto es, valen para indicar un objeto al cual se atribuye de cualquier modo, existencia fuera de nosotros en un mundo inteligible» (Enriques [1924], p. 25); por otra, los postulados se distinguen de las *nociones comunes o axiomas* por el carácter constructivo de los primeros y porque las últimas son comunes a varias ciencias.

10 Enriques [1924], pp. 36 y 37. Sobre el tipo de lenguaje empleado en la traducción, Enriques dice que «la divulgación de los *Elementos* que se ofrece es bastante fiel para que los lectores puedan apreciar el sabor de la obra griega, y que por otra parte es bastante libre para haber adoptado tal vez expresiones del lenguaje geométrico que son más breves y familiares a nuestro oído» (Enriques [1924], p. 10).

3

Y que, con cualquier centro y cualquier distancia, se pueda describir un círculo.

4

Y que todos los ángulos rectos sean iguales entre sí.

5

Y que si una recta, cortando a otras dos, forma los ángulos internos a una misma parte, menores de dos rectos, las dos rectas prolongadas al infinito se encontrarán de la parte en que son los dos ángulos menores de dos rectos.

Hay que tener presente que actualmente decimos "segmento de recta" y no "recta limitada", reservando la palabra "recta" para algo infinito. De acuerdo con esto, podemos reinterpretar los dos primeros postulados del modo siguiente: por dos puntos cualesquiera pasa una y sólo una recta.

La formulación del quinto postulado, tal y como aquí aparece enunciado, no corresponde a la actual (por un punto exterior a una recta pasa una única paralela), pero su equivalencia está claramente establecida en los *Elementos*. Parece ser que Proclo (412-482) fue el primero en enunciar el quinto postulado de esta forma familiar, y la razón de su mayor aceptación parece estar en que: es el resumen del postulado más claro a los ojos modernos, los comentaristas de la nueva generación lo consideran la mejor expresión de la posición de Euclides[11], y «puede ser reformulado fácilmente para sugerir geometrías no euclidianas, negando bien la existencia o bien la unicidad de las paralelas»[12].

El problema con el quinto postulado radicaba en que a todo el mundo le parecía que los cuatro primeros postulados eran evidentes por sí mismos, cosa que no sucedía con el quinto. Les parecía que este postulado no era del todo intuitivo, ya que, por ejemplo, para la situación descrita en el quinto postulado, si la suma de los ángulos internos es un poco menor que 180º, el punto de intersección de las

11 Gray [1992], p. 58.
12 Ibíd.

dos rectas está tan alejado, que nuestra intuición nos sería de muy poca ayuda. Desde luego que esta objeción también puede expresarse en términos de la noción de rectas paralelas: de acuerdo con la definición, las paralelas son rectas situadas en un mismo plano, que al prolongarse indefinidamente nunca se cortan, por tanto, y puesto que nuestra intuición es limitada, cabe preguntarse si realmente existen las paralelas y, en caso afirmativo, si existe una única paralela a una recta y a punto dados[13]. Así pues, el debate sobre el estatus del postulado de las paralelas transcurrió por tres vías: «intentos de derivar el postulado de las paralelas del resto de la geometría elemental, intentos de volver a formular el postulado o la definición de las paralelas convirtiéndolo en algo que no pudiera ser objeto de tantas objeciones y descripciones de lo que podría abarcar la geometría si se negara, de alguna manera, el postulado»[14].

De acuerdo con la primera vía, el problema con el postulado no radicaba en su verdad sino en su independencia respecto al resto de postulados; es decir, para muchos matemáticos, este postulado en realidad no era tal, sino un teorema que podía demostrarse a partir de los otros cuatro. Se hicieron muchos esfuerzos infructuosos para llevar esta tarea a feliz término, hasta que con la construcción de geometrías no-euclidianas quedó demostrada la independencia del quinto postulado; es decir, el hecho de que el quinto postulado no es derivable de los otros. Hemos de concluir que el quinto postulado es independiente de los otros cuatro, puesto que podemos construir un sistema de geometría, también con cinco postulados, en el que uno de sus postulados niega el postulado de las paralelas, mientras que los otros cuatro se mantienen igual, de tal modo que ninguno de los

13 Nuevamente, la geometría griega no es del todo abstracta, el geómetra no sólo trata con definiciones, también se ocupa de la existencia y construcción de sus objetos. Las palabras de Aristóteles son muy significativas en este sentido: «Un geómetra indicará por medio de una definición qué cosa significa la palabra triángulo; más que un triángulo exista o que sea posible construirlo, y que sea por ende lícito sacar consecuencias del hecho de haberlo construido, es una verdad que no viene ni admitida ni probada por medio de la definición, y que debe ser supuesta o demostrada a parte» (Aristóteles, *Analítica posterior*; citado desde Enriques [1924], p. 35).

14 Gray [1992], p. 56.

teoremas (los enunciados derivados de los postulados) contradice (lógicamente) a los postulados. Precisamente de esta manera es como se procede a construir geometrías no-euclídeas. Por tanto, cualquiera de los sistemas de geometría no-euclidiana tiene un postulado alternativo a –un postulado incompatible con– el quinto postulado de Euclides que toma una de las formas de su negación. Esto es, como el quinto postulado asevera dos tipos de cosas, la existencia de paralelas y el que ésta es única, entonces es posible construir por esta vía sólo dos tipos de geometrías: las que afirman que no hay paralelas y las que afirman que hay más de una paralela. Todo esto, claro está, respecto a una recta y a un punto dados.

Entre las propiedades que debe cumplir un sistema de geometría alterno a la euclidiana mencionamos el que sus teoremas no contradigan a sus propios postulados. Esto equivale a decir que el sistema alternativo tiene que ser consistente, que carezca de contradicciones internas. Ahora bien, ¿cómo determinar que un sistema de geometría es consistente o inconsistente? Esto lo abordaremos más adelante, cuando contemos con más elementos conceptuales sobre las geometrías no-euclidianas.

Veamos entonces las principales características de las geometrías no-euclidianas. La primera de estas posibilidades que se apartan de Euclides fue explorada independientemente, y casi simultáneamente, a comienzos del siglo XIX por Karl Friedrich Gauss, János Bolyai y Nikolai Lobachevski, quienes desarrollaron la geometría no-euclidiana llamada *geometría hiperbólica*. Esta geometría mantiene los cuatro primeros postulados de la geometría euclídea pero rechaza el quinto, y propone como alternativa algo equivalente al siguiente enunciado: por un punto exterior a una recta pasa *más de* una paralela. Nótese que si se omiten las palabras '*más de*' se obtiene una expresión equivalente al postulado de las paralelas.

La segunda posibilidad fue propuesta, no mucho después de la primera, por el matemático alemán Georg Friedrich Riemann. El tipo de geometría no-euclídea que propuso se conoce como *geometría esférica*, de modo que rechaza tanto el quinto postulado como el segundo, y admite los otros tres de la geometría euclídea. Los dos postulados alternativos son respectivamente: por un punto exterior a una recta *no pasa ninguna* paralela, y dos rectas cualesquiera tienen *dos* puntos distintos en común. Además, la *geometría elíptica* tiene como variante del segundo postulado de la geometría esférica el siguiente enunciado: dos rectas cualesquiera tienen *un único* punto en común.

La cuestión ahora de fondo es: ¿por qué estas geometrías no-euclídeas son consistentes? Un sistema es *contradictorio* o *inconsistente* cuando a partir de él se puede demostrar cualquier enunciado, y es *consistente* o *no contradictorio* en caso contrario, cuando de él no se deriva ninguna contradicción. Así, en un sistema contradictorio, podemos encontrar que algunos enunciados y sus respectivas negaciones son derivables. Esta es la forma sintáctica de definir la consistencia, pero está su equivalente semántica, que es más efectiva: un sistema axiomático es consiste si tiene un modelo, una estructura matemática, en el cual los axiomas son verdaderos. Y esto último por la siguiente razón, en palabras de van Fraassen: «Todos los axiomas de la teoría (adecuadamente interpretados) son verdaderos en el modelo, por lo que todos los teoremas son similarmente verdaderos en él; pero ninguna contradicción puede ser verdadera de algo; por lo tanto, ningún teorema es una contradicción»[15].

Veamos esta noción de modelo en términos generales, para después volver al problema de la consistencia de las geometrías no-euclídeas. Un sistema formal puede tener un modelo (o una interpretación o realización), aunque normalmente éste no es único: puede haber más de un modelo (interpretación) que *realice* o *satisface* al conjunto de axiomas. Algunas de estas interpretaciones pueden ser lógicas y otras pueden ser descriptivas, lo importante es que ninguna de estas interpretaciones particulares desempeña un papel privilegiado en la construcción del sistema.

En general, podemos introducir el concepto de modelo o realización en el marco de la axiomática formal transformando el lenguaje formal L correspondiente en un sistema semántico mediante la in-

15 van Fraaseen [1980], p. 43.

terpretación del lenguaje en una o más estructuras. A continuación se aclara lo que es una estructura, para después introducir la función interpretación.

Una estructura matemática $\mathbf{A} = \langle A, R_i \rangle_{i=1\text{-}n}$ es una entidad compleja, compuesta de un conjunto A no vacío, llamado universo de la estructura, y una serie de relaciones R_i definidas sobre ese universo. Aquí, como en todo lo que sigue, *estructura* es equivalente a *sistema*[16].

Así, y en pocas palabras, un modelo del lenguaje L es una estructura **A**, más una función I que interpreta los enunciados de L en la estructura **A**. Precisando, se parte de una estructura **A** y un lenguaje formal L adecuado a **A**. La función interpretación I hace, a grandes rasgos, que los términos del lenguaje L denoten individuos del sistema **A**, y que todos los enunciados[17] de L adquieran un valor de verdad que se conviertan en verdaderos o falsos en **A**. Cuando estas condiciones se cumplen, se dice que la estructura **A** es un modelo de los enunciados del lenguaje L. Esto es, si se trata de un enunciado ϕ de L, simplemente decimos que **A** es un modelo de ϕ, o que ϕ es verdadero en **A**. De igual forma, si se trata de un conjunto de enunciados $\mathbf{\Gamma}$. En este caso, para cada $\phi \in \mathbf{\Gamma}$, ϕ es verdadero en **A**. Las siguientes expresiones son todas equivalentes entre sí: **A** es un modelo de ϕ, **A** satisface a ϕ, ϕ es verdadero en **A** y ϕ es satisfecho en **A**[18].

Volviendo entonces a las geometrías no euclidianas, lo anterior quiere decir que para determinar si una geometría no-euclídea particular es consistente, solamente es necesario encontrar un modelo. Esto es, una estructura que sea modelo de los axiomas, o lo que es lo mismo, que satisfaga los axiomas. En realidad, esto se puede lograr con las distintas geometrías no-euclidianas mencionadas, pero aquí únicamente lo ilustraremos para el caso de la geometría esférica.

16 En esto me guío por van Fraassen [1971], p. 28, pero hay quienes diferencian entre estructura y sistema; véase, por ejemplo, Mosterín [1984], p. 218.

17 Nuevamente empleo "enunciado" en el sentido de la lógica formal, como "fórmula (bien formada) cerrada"; esto es, como "fórmula bien formada" en la que las variables están ligadas o no libres. Esto, desde el punto de vista de la gramática de un lenguaje natural como el castellano, equivaldría aproximadamente a "oración declarativa", aquella que es verdadera o falsa. Véase van Fraassen [1971], p. 120.

18 Para ampliar más estas ideas, véase Manzano [1989] pp. 76-77.

Para ello establezcamos las siguientes interpretaciones de las expresiones de los axiomas de la geometría esférica en términos de la geometría euclidiana: 'plano' como 'superficie de una esfera euclidiana', 'recta' como 'círculo máximo en esta superficie', etc. De esta forma, cada axioma de la geometría esférica se transforma en uno de la geometría euclídea, y podemos entender cada uno de ellos si elegimos como modelo simplemente la superficie de una esfera (euclídea, desde luego). De tal modo que, por ejemplo, la propiedad de que la recta es la distancia más corta entre dos puntos correspondería en la geometría esférica a: el círculo máximo es la distancia más corta entre dos puntos de la superficie esférica; y el axioma de las paralelas diría: por un punto en la superficie de una esfera no se puede trazar ningún círculo máximo paralelo a un círculo máximo dado. Que esto último es así, se puede ver más fácilmente si consideramos la Tierra como una esfera perfecta, de modo que el ecuador y los meridianos serían círculos máximos. En este modelo tenemos que dos meridianos cualesquiera son perpendiculares al ecuador, pero no son paralelos porque se cortan en el Polo Norte y en el Polo Sur. En la esfera no hay paralelas, círculos máximos que no se corten.

Dicho lo anterior, deberíamos concluir que la geometría esférica es consistente porque hemos dado con un modelo, la esfera, en el que los axiomas son verdaderos. Pero esta conclusión es apresurada. Lo que realmente hemos hecho es mostrar un modelo euclídeo, la esfera, que también es modelo de la geometría esférica. Por tanto, sólo podremos concluir que la geometría esférica es consistente cuando demostremos que la euclidiana lo es; lo cual hasta ahora no está asegurado. Lo cierto es que no hay manera de dar respuesta a la consistencia de un sistema en sentido absoluto, sin referencia a ningún otro.

En síntesis, se tiene que para cada una de las geometrías no-euclídeas se puede elaborar una interpretación, construir un modelo, en la geometría euclídea; y que de haber alguna inconsistencia en alguna de ellas, ésta debería aparecer en alguno de los modelos que satisface la geometría euclídea. Tenemos entonces que la consistencia de las primeras está supeditada a la consistencia de la geometría euclídea o, en términos más generales, que la consistencia de un sistema acontece con respecto a otro que se toma como referencia. Por tanto, se habla de consistencia relativa y no absoluta.

4. GEOMETRÍA APLICADA

Una vez elaboradas las geometrías no-euclídeas, la pregunta obvia es: ¿cuál es la geometría verdadera? o, en términos más directos, ¿cuál es la geometría del mundo físico? Este problema sobre la estructura geométrica de nuestro espacio físico no había surgido antes, puesto que cuando sólo se contaba con la geometría euclideana, y no existiendo otra posibilidad, se suponía esta geometría como la aplicable a la realidad física. La geometría se consideraba una investigación del espacio físico que nos rodea, y no una construcción formal, lógica, exclusivamente tal y como hemos observado más arriba en el caso de la geometría griega. Pero ante la presencia de diversas geometrías, la salida al problema comienza por distinguir entre una geometría pura (matemática) y una geometría aplicada (física). Por tanto, desde el punto de vista lógico, las geometrías no-euclidianas están en igualdad de condiciones que la euclidiana: podemos calificarlas a todas ellas de geometrías puras. Pero desde el punto de vista de la experiencia, en relación con la realidad, queda el interrogante de cuál de estas geometrías describe la estructura espacial de la realidad o, para no ser pretenciosos, cuál de estas geometrías se adecua mejor a la experiencia. En síntesis, una geometría pura es un sistema formal que no nos dice nada sobre la realidad física, mientras que una geometría aplicada es una teoría empírica, una teoría física que, desde la perspectiva que aquí se está explicando, resulta de dotar de significado a una geometría matemática.

Para ilustrar esto último consideremos muy por encima el siguiente sistema G que es una minigeometría matemática, un sistema bastante simplificado que contiene esencialmente los axiomas de enlace de Hilbert[19]

19 Los términos que empleo aquí para las constantes predicativas los tomo directamente de Hilbert [1899], p. 3. Expresión equivalentes a 'axiomas de enlace' son 'axiomas de conexión' y 'axiomas de incidencia'.

para puntos y rectas de la geometría euclideana[20]. Como sintaxis se tiene un lenguaje apropiado para la lógica elemental, el cálculo de predicados de primer orden con identidad. Las constantes lógicas del lenguaje son:

1) las conectivas: el símbolo de negación $\sim$, el de implicación $\rightarrow$, el de disyunción $\vee$ y el de conjunción $\wedge$;
2) los cuantificadores: el cuantificador universal $\forall$ y el existencial $\exists$;
3) dos predicados binarios especiales: el símbolo de identidad $=$ y el de diversidad $\neq$.

Consideramos a x, y, z, w como variables y como constantes no-lógicas (símbolos primitivos del sistema) a los predicados monádicos P, R y el diádico E; y leamos Px, Rx, Exy, respectivamente, como x es P, x es R, x está relacionado con y mediante E. El sistema G tiene los siguientes tres axiomas:

A1) $\forall x\, \forall y\, (Px \wedge Py \wedge x \neq y \rightarrow \exists z\, (Rz \wedge Exz \wedge Eyz))$

A2) $\forall x\, \forall y\, (Rx \wedge Ry \rightarrow \exists z\, \exists w\, (z \neq w \wedge Pz \wedge Pw \wedge Ezx \wedge Ewx \wedge Ezy \wedge Ewy) \rightarrow x = y)$

A3) $\forall x\, (Rx \rightarrow \exists z\, \exists w\, (z \neq w \wedge Pz \wedge Pw \wedge Ezx \wedge Ewx))$

Los teoremas de G son, por lógica elemental, las consecuencias de estos axiomas. Pero aquí hay que aclarar que en esta presentación de Hilbert el sistema geométrico euclídeo, como sistema formal que es, está desprovisto de significado.

Teniendo presente lo dicho más arriba sobre la noción de modelo, veamos dos interpretaciones descriptivas (dos modelos) del sistema G.

1. La *interpretación usual* del sistema G sería: x, y, z, w son puntos o rectas; P, R, E son los predicados, respectivamente, 'es un punto', 'es una recta' y 'está situado en'. Con esto, los axiomas del sistema G se transforman en los axiomas corrientes: por dos puntos pasa una recta, dos puntos determinan una única recta y una recta tiene al menos dos puntos.

20 Este ejemplo es una adaptación del ejemplo de van Fraassen [1972], p. 310.

2. Lo que en geometría proyectiva se conoce como la *interpretación dual*. Esta se obtiene a partir de las estipulaciones anteriores intercambiando los significados de P y R del modo siguiente: P como 'es una recta' y R como 'es un punto'. Los axiomas ahora dirían: los dos primeros, dos rectas se cortan en un punto y este punto es único; y el tercero, por un punto pasan al menos dos rectas.

Así, entonces, a partir del minisistema geométrico formal anterior se puede construir una geometría física dotando de significado –significado empírico– al sistema mediante algún mecanismo. Puesto que en general, de acuerdo a la perspectiva que se está presentando, el lenguaje de una teoría empírica puede dividirse en un lenguaje observacional y otro teórico; y dado que la interpretación del lenguaje observacional es una *interpretación directa*, ya que se obtiene a través de lo inmediatamente dado a los sentidos; y puesto que lo peculiar de los términos teóricos es no tener una interpretación directa, se tiene entonces que la función principal de este mecanismo es la de proporcionar una *interpretación indirecta e incompleta* de los términos teóricos[21].

Como ya se dijo, a este tipo de mecanismo los positivistas lógicos le dieron diferentes nombres, dependiendo de lo que querían enfatizar; lo cual ya de por sí es algo criticable en la medida en que cada denominación logre su propósito[22]. Carnap [1939] habla de *postulados semánticos* –equivalentes a reglas de interpretación como las anteriores– en un contexto amplio que incluye tanto sistemas matemáticos como teorías empíricas. Reichenbach [1927], con el mismo propósito, dotar de significado al sistema, pero circunscrito al caso de la geometría física, habla de *definiciones coordinadoras*, ya que coordinan un objeto físico (una vara maciza) con un concepto (igual longitud), especificando así su denotación[23]. P. W. Bridgman, destacando el aspecto de la medida en las ciencias empíricas, propuso *definiciones operacionales*. Finalmente, Carnap [1956] habla de *reglas*

---

21 Véase Carnap [1956].

22 Para las críticas al enfoque sintáctico-axiomático de las teorías remito a Guerrero [2001].

23 Véase Reichenbach [1951], p. 141.

de correspondencia, tal como se advirtió desde un comienzo en la caracterización del enfoque sintáctico, con objeto de afinar más la clarificación de dicho mecanismo en las teorías empíricas, evitando que las reglas de correspondencia se entendieran como definiciones estrictas de términos teóricos, pues de ser así se obtendrían interpretaciones observacionales completas de estos términos, perdiéndose de este modo su carácter teórico por completo.

De acuerdo con Reichenbach, lo que respalda Carnap[24], son ilustraciones de definiciones coordinadoras:

1) Un punto es un lugar en el espacio físico.
2) La trayectoria de un rayo de luz en el vacío es una línea recta.
3) Un cuerpo completamente rígido, libre de deformaciones, conserva sus medidas cuando se transporta.

En el presente caso de la geometría física hablamos de definiciones coordinadoras[25], pero éstas desempeñan el mismo papel de las reglas de correspondencia de las que hablamos más arriba; de tal forma que en el presente caso la minigeometría busca dar significado a términos teóricos como 'punto', 'recta', 'está situado en', etc., relacionándolos con expresiones como 'lugar en el espacio', 'trayectoria de un rayo de luz', etc., que tienen una interpretación directa en términos de lo *directamente dado*: en términos de objetos y propiedades observables. No hay que olvidar que el resultado final de este mecanismo de restauración de significados tiene la peculiaridad de que la interpretación de los términos teóricos no es completa: los términos teóricos potencialmente "dicen mucho más" de lo que puede ser aprehendido por las reglas de correspondencia actuales y futuras de una teoría dada.

Ahora bien, una vez hemos impartido significados por medio de estas definiciones, contamos con una teoría física, de modo que puede

24 Carnap [1939], p. 117 y Carnap [1966], p. 314.
25 Que de algún modo son equivalentes a las reglas de correspondencia se puede ver en Carnap [1966], p. 314 y Suppe [1974], p. 36.

abordarse por medios empíricos la pregunta de si la geometría física es euclidiana o no, ya que es una cuestión empírica la forma como se comportan los rayos de luz y los cuerpos físicos. Una respuesta a esta cuestión fue dada en 1915 por Einstein en su teoría general de la relatividad, en la cual concluye que la geometría adecuada para representar la estructura especial del mundo físico es la geometría no-euclidiana.

Einstein en su corto artículo *Geometría y experiencia* (1921) delinea su concepción personal sobre la relación entre geometría y física, la cual es bastante próxima a la que hemos descrito más arriba bajo el *Enfoque sintáctico-axiomático de las teorías* defendido por los empiristas lógicos. Puesto que el artículo de Einstein es bastante significativo tanto en relación con la estructura no-euclídea del espacio físico como con la importancia del análisis estructural de la geometría en los términos expuestos aquí del positivismo lógico, vale la pena destacar algunos elementos importantes del mismo, teniendo en cuenta que nuestra principal motivación en esta exposición es el análisis de la estructura de una teoría del espacio más que el contenido, valor empírico, de la misma.

En este escrito Einstein comienza preguntándose: «¿la razón humana, pues, sin acudir a la experiencia, con sólo entregarse al pensamiento, es capaz de desentrañar las propiedades de los objetos reales?»[26] La pregunta busca claramente sentar posición respecto a la principal tesis de la epistemología kantiana, que en el dominio particular de la geometría mantiene que los axiomas de la geometría son sintéticos *a priori*. De acuerdo con Kant, son *a priori* porque no son válidos en virtud de una posible experiencia sino que son pensados de inmediato por su necesidad, tienen una certeza apodíctica precisamente por ser independientes de la experiencia.

La respuesta de Einstein es bien conocida: «En la medida en que se refieren a la realidad, las proposiciones de la matemática [de la geometría aplicada] no son seguras y, viceversa, en la medida en que son seguras [cuando pertenecen a la geometría pura], no se

26 Einstein [1921], p. 24.

refieren a la realidad»[27]. Estas palabras son un claro rechazo a la idea kantiana de fundamentar el espacio físico de la realidad de una forma apriorística o, lo que es lo mismo, la negación de la existencia de juicios sintéticos *a priori*, puesto que, de acuerdo con Einstein, la estructura geométrica del espacio se fundamenta, en últimas, en la experiencia. A continuación Einstein reconoce que esta separación entre geometría pura y geometría aplicada fue un logro de los método axiomáticos, en los que se obtiene «una neta separación entre lo lógico-formal y su objetivo o contenido intuitivo»[28], tal y como hemos intentado mostrar en esta exposición.

Finalmente, Einstein coincide con los empiristas lógicos en una idea más, en que para pasar de una teoría matemática a una teoría física hay que introducir enunciados semejantes a las definiciones coordinadoras de Reichenbach.

> Para poder hacer alguna afirmación –dice Einstein–, la geometría debe ser desprovista de su carácter meramente lógico-formal mediante la coordinación de los objetos reales de la experiencia con los esquemas conceptuales vacíos de la geometría axiomática. Para lograrlo, sólo debemos agregar la siguiente proposición: los cuerpos rígidos están relacionados, con respecto a su posible localización, tal y como están los cuerpos en la geometría euclidiana de tres dimensiones. Y ahora, las proposiciones de Euclides ya contienen afirmaciones en cuanto al comportamiento de los cuerpos prácticamente rígidos[29]

Ahora bien, la verdad o falsedad de dicha proposición, la que establece la equivalencia entre los cuerpos rígidos reales y los cuerpos de la geometría, sólo se puede establecer a través de la experiencia; y de acuerdo con Einstein, la equivalencia es aproximada, sólo vale para dimensiones pequeñas.

En síntesis, se argumentó que la siguiente tesis de los empiristas lógicos (extraída a la luz de sus reflexiones sobre la diferencia entre geometría pura y física) es bastante plausible: una geometría física GF

27 Ibíd. Los paréntesis son nuestros.
28 Ibíd.
29 Ibíd., p. 26.

no es más que una geometría pura GP, más una serie de interpretaciones I (GF = GP + I). Igualmente se mostró que la concepción de Einstein, en este tema, es en lo esencial significativamente próxima a la sostenida por los empiristas lógicos. Por otra parte, se concluyó que debido al mecanismo de las reglas de correspondencia (interpretaciones empíricas), una geometría física o teoría del espacio se evalúa a la luz de la experiencia y no de forma *a priori*, como pretendía Kant. Finalmente, se dijo, sin argumentación alguna, que la imagen de la estructura de las teorías descritas bajo la fórmula GF = GP + I se adecua muy poco a la gran mayoría de teorías empíricas (físicas, biológicas, psicológicas, económicas, etc.).

Referencias*

Carnap, R. [1939]: *Fundamentos de Lógica y Matemáticas*, Madrid, Taller de Ediciones Josefina Betancor, 1975.

—— [1956]: "The methodological character of theoretical Concepts", en H. Feigl and M. Scriven (eds.), *Minnesota Studies in the Philosophy of science*, vol. 1, Minneapolis, 1956; v.e. "El carácter metodológico de los conceptos científicos", en J. L. Rolleri (Comp.), [1986].

—— [1966]: *Fundamentación lógica de la física*, Buenos Aires, Sudamericana, 1969.

Einstein [1921]: "Geometría y experiencia", en A. Einstein, *Sobre la teoría de la relatividad y otras contribuciones a la ciencia*, Barcelona, Antoni Bosch, 1982.

Enriques, F. [1924]: *Los elementos de Euclides y la crítica antigua y moderna*, Instituto "Jorge Juan" de Matemáticas, Madrid, 1954.

Euclides: *Elementos*, ver Enriques, F. [1924].

Gray, J. [1992]: *Ideas de espacio*, Madrid, Biblioteca Mondadori.

Guerrero, G. [1997]: "Epistemología empirista lógica", *Praxis Filosófica*, Nueva Serie, N° 7, 1997, Escuela de Filosofía, Universidad del Valle, Santiago de Cali - Colombia.

* Los números de página de las referencias corresponden a la versión en inglés, cuando la referencia no es explícita.

—— [2001]: "Fallas en el enfoque sintáctico-axiomático de las teorías a la luz del enfoque semántico", en J.M. Sagüillo, J.L. Falguera y C. Martínez (eds.), *Proceedings of the Congress Formal Theories and Empirical Theories. Foundational, Ontosemantic and Pragmatic Aspect*, Universidad de Santiago de Compostela – España, pp. 595-610.

—— [2002]: "Enfoques sintáctico-axiomático y semántico de las teorías empíricas", *Conferencia Internacional de Filosofía de la Ciencia y de la Tecnología*, Universidad del Norte, Barranquilla - Colombia, septiembre. (Sin publicar).

—— [2004]: "Individuación de las teorías en el enfoque semántico", en J. Poulain y W. González (eds.), *Transformaciones contemporáneas de la filosofía*, Cali, Universidad del Valle y Universidad de París VIII, 2004.

Hilbert, D. [1899]: *Fundamentos de la geometría*, Madrid, Consejo Superior de Investigaciones Científicas, 1996.

—— [1917]: "El pensamiento axiomático", en D. Hilbert, *Fundamentos de las matemáticas*, UNAM, México, 1993. Colección Mathema,

Manzano, M. [1989]: *Teoría de Modelos*, Madrid, Alianza.

Mosterín, J. [1984]: *Conceptos y Teorías en la Ciencia*, Madrid, Alianza Editorial, 2000.

Putnam, H. [1962]: "What theories are not", en Nagel, Suppes y Tarski, Logic, *Methodology, and Philosophy of science: Proceedings of 1960 International Congress*, Stanford, Stanford University Press, 1962; v.e. "Lo que las teorías no son", en J. L. Rolleri (Comp.) [1986].

Reichenbach, H. [1951]: *La filosofía científica*, México, FCE.

Suppe, F. [1974]: "The Search for Philosophic Understanding of Scientific Theories", en F. Suppe (ed.) [1974]: *The Structure of Scientific Theories*, University of Illinois Press, Urbana; v.e. "En busca de una comprensión filosófica de las teorías científicas", en *La estructura de las teorías científicas*, trad. esp. P. Castillo y E. Rada, Madrid, Editora Nacional, 1979.

Suppes, P. [1967]: "What is a scientific theory?", en S. Morgenbesser, *Philosophy of science today*, New York, Basic Book, 1967.

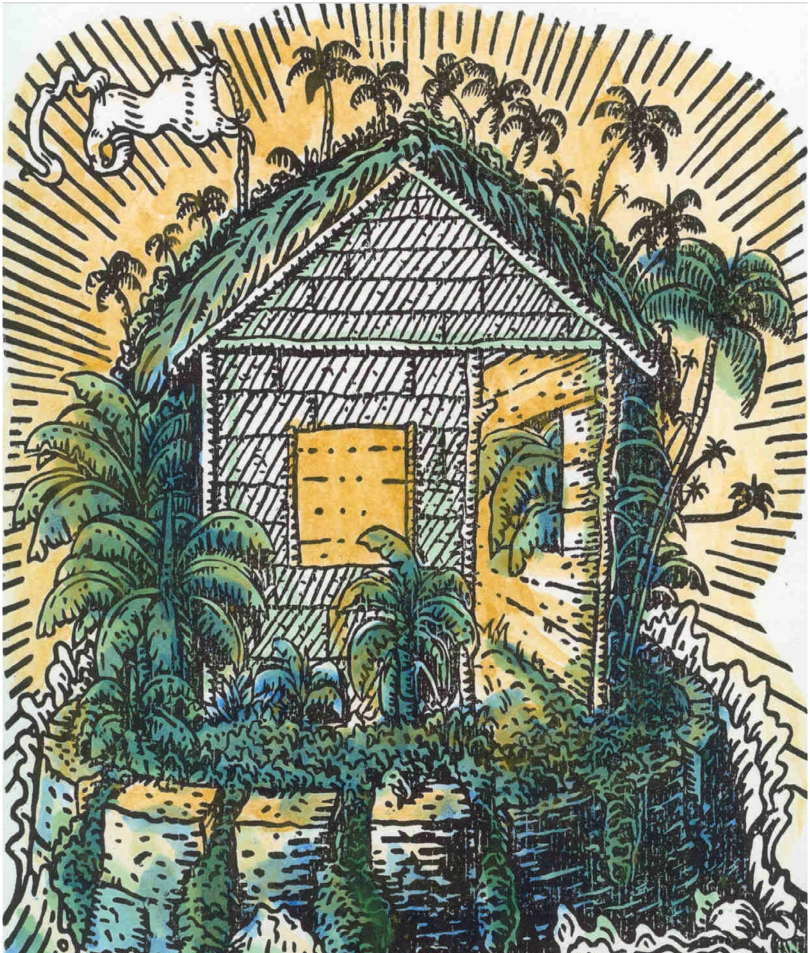
Tarski, A. [1940]: *Introduction to Logic and to the Methodology of Deductive Sciences*, New Cork, Dover; v.e. *Introducción a la lógica y a la metodología de las ciencias deductivas*, Madrid, Espasa-Calpe, 1985.

Van Fraassen, Bas. C. [1970]: "On the extension of Beth's semantics of physical theories", *Philosophy of Science*, September, 1970, pp. 325-339.

—— [1971]: *Semántica formal y Lógica*, Universidad Nacional Autónoma de México, 1987.

—— [1972]: "A Formal Approach to the Philosophy of Science", en R. Colodny (ed.) [1972]: *Paradigms and Paradoxes: the philosophical challenge of the quantum domain*, Pittsburgh, University of Pittsburgh Press, pp. 303-366.

—— [1980]: *The Scientific Image*, Oxford, Clarendon Press; v.e. *La imagen científica*, México, Paidós-UNAM, 1996.



Juan Carlos Rivero Cintra
Serie *La vuelta al mundo*, *El sagrado Bohío* (xilografía), 39 x 27 cm, 1995.