

Descripción y análisis de procesos de pensamiento de estudiantes al resolver problemas matemáticos

Guillermo Cervantes*, Anibal Mendoza**, Liduvina Peñaloza***, Magdalena Ramírez****, María Margarita Viñas*****

Resumen

Esta investigación tiene como propósito comprender el complejo de manifestaciones cognitivas y afectivas que se desencadenan en el proceso de resolución de problemas matemáticos. Se ubica en los principios teóricos de la psicología cognitiva, y en particular en el marco conceptual propuesto por Alan Schoenfeld, que conjuga las siguientes categorías: conocimiento de ámbito específico, estrategias heurísticas, estrategias metacognitivas y componente afectivo. Se desarrolló un estudio de casos múltiples, y los resultados muestran que éstos se movieron dentro de un continuo, desde aquellos cuyas reacciones ante la resolución de problemas mostraron hábitos de ensayo y error relativos al manejo de símbolos sin el ejercicio de ninguna estrategia de control, hasta aquellos cuyas manifestaciones son comparables a la de los «expertos».

Introducción

El desarrollo del pensamiento se constituye en la piedra angular de la formación integral del individuo: función esencial de toda labor educativa. La educación

debe propiciar el desarrollo de las capacidades cognitivas y afectivas del que aprende, de tal manera que le permitan la construcción de una nueva representación del mundo y de sus posibilidades, así como el despliegue de su potencial creativo, para el ejercicio de acciones transformadoras.

Dentro de este contexto, el aprendizaje de las matemáticas se constituye en una modalidad de pensamiento, que genera el desarrollo de un punto de vista matemático, en la búsqueda de sentido de la realidad circundante y, por ende, en la construcción de nuevos conocimientos. Fundamenta el conocimiento, el desarrollo de un pensamiento autónomo, comprensivo, creativo, intuitivo, flexible,

* Profesora de Matemáticas, Universidad del Norte. Magíster en Educación.

** Profesor de Física, Universidad del Norte. Magíster en Educación.

*** Profesora de Biología, Universidad del Atlántico. Magíster en Educación.

**** Profesora de Psicopedagogía, Corporación Universitaria de la Costa. Magíster en Educación.

***** Profesora de Matemáticas, Universidad del Norte. Magíster en Educación.

autodeterminado, metacognitivo, ..., que dé lugar a un proceso evolutivo conceptual en el que se interpreten procesos de *insight*, heurísticas, metacognitivos, habilidades, destrezas y el desarrollo de una mayor sensibilidad, para establecer nuevas consideraciones. Sensibilidad que generará actitudes de apertura y de cambios que conlleven al autodesarrollo y a la concepción de nuevas perspectivas para asumir la vida profesional que demanda la transferencia de los conocimientos matemáticos a las demás esferas de la vida de relación.

Como educadores, somos conscientes de que debemos asumir estas realidades en nuestra labor educativa, con nuevas políticas de acción, que promuevan el desarrollo de procesos de comprensión-acción-reflexión, en donde las facultades intelectuales y afectivas se conviertan en motor y análisis de la praxis educativa. Con esta visión, realizamos la presente investigación, encaminada a conocer procesos de pensamiento que desarrollan estudiantes del Ciclo Básico de Ingenierías durante la resolución de problemas matemáticos, porque consideramos que comprendiendo el complejo de manifestaciones cognitivas y afectivas que se desencadenan alrededor del aprendizaje de las matemáticas, particularmente en la resolución de sus problemas, se podrán proporcionar elementos básicos para la comprensión amplia del educando y, por consiguiente, para la transformación continua de nuestra praxis educativa.

De esta manera se podrá pensar en promover posteriormente la construcción de una didáctica regenerativa, constructiva, que se centre en las acciones del que aprende, que propicie el desarrollo del pensamiento, el aprendizaje de un cono-

cimiento matemático construible, dejando atrás conceptos tradicionalistas que rinden culto al dogma, al aprendizaje memorístico de fórmulas, a la cobertura de una gran extensión de contenido y a la presentación de los mismos en forma aislada, con respecto tanto a su secuencia interna como a su relación con otras ciencias. Concepciones que han servido de estímulos para la construcción de percepciones erróneas acerca de las matemáticas como saber inaccesible, con lo cual se ha favorecido la baja comprensión del sentido de su aprendizaje y, por ende, el bajo rendimiento académico en las asignaturas matemáticas en el ámbito universitario.

Consideramos que si las matemáticas son producto de la construcción del individuo, el abordaje de sus problemas dependerá de cómo se propicie el desarrollo de los procesos de pensamiento. Si la resolución de los problemas estimula el desarrollo del pensamiento, sólo se tendrán resultados exitosos en la medida en que se elimine el carácter repetitivo y mecánico del proceso, para dar paso a estrategias heurísticas que ofrezcan posibilidades de acercamiento a la solución, a estrategias metacognitivas que regulen el empleo eficaz de los propios recursos cognitivos y afectivos, a la formación de actitudes favorables, para que, amalgamándose, contribuyan a que los estudiantes se sientan seguros de sus potencialidades, reforzando continuamente la consolidación y construcción de los conocimientos matemáticos.

La potencialización de estos eventos se constituirá en criterio para el mejoramiento de la calidad de la Educación, puesto que se intensificarían, para los educandos, los niveles cualitativos de

conocimientos adquiridos a partir de la experiencia académica, de tal forma que logren proyectarlos en su quehacer cotidiano y puedan contribuir al desarrollo de la sociedad.

Las acciones propuestas están en concordancia con los principios y políticas de la Universidad del Norte, así como con los lineamientos educativos del Nuevo Proyecto Nacional que coloca a la educación en un plano más humanizante.

Con esta investigación aspiramos a posibilitar la apertura de nuevos horizontes en el campo de la educación matemática a nivel universitario, para seguir indagando sobre el verdadero sentido del aprendizaje de las matemáticas, que redunde en el desarrollo de procesos de pensamiento, durante el abordaje de la resolución de problemas.

1. Objetivos

1.1. Objetivo general

Describir, analizar y comprender los procesos de pensamiento que utilizan y/o desarrollan estudiantes del Ciclo Básico de Ingenierías de la Universidad del Norte cuando resuelven problemas de matemáticas.

1.2. Objetivos específicos

- Reconocer y analizar:
 - Los conocimientos de ámbito específico
 - Las estrategias heurísticas
 - Los estados afectivos
 - Los procesos metacognitivosque utilizan y/o desarrollan los estudiantes en el proceso de resolución de problemas de la asignatura Cálculo I.

2. Marco conceptual

2.1. Concepción general del pensamiento

Desde el paradigma de la psicología cognitiva, el pensamiento es considerado como «la capacidad que tiene el ser humano para construir una representación e interpretación mental significativa de su relación con el mundo»¹, lo que indica que el individuo, en su relación con el mundo, lo vive, lo transforma, a través del conocimiento que ha elaborado acerca de él.

Esta definición general de pensamiento desde el punto de vista cognitivo incluye, según Mayer², tres ideas básicas:

- a. El pensamiento es cognitivo, pero se infiere de la conducta, ocurre internamente, en la mente, en el sistema cognitivo y debe ser inferido indirectamente.
- b. El pensamiento es un proceso que implica algunas manipulaciones, establece algún conjunto de operaciones sobre el conocimiento, en el sistema cognitivo.
- c. El pensamiento es dirigido y tiene como resultado la «resolución» de problemas, o se dirige hacia una solución.

Los aspectos afectivos son de capital importancia para el desarrollo del pensamiento, debido a que contribuyen a que

¹ VILLARINI, A. *et al.* Departamento de Instrucción Pública de Puerto Rico (D.I.P.). *Manual para la enseñanza del pensamiento* (Ed. Preliminar) San Juan, 1991, p. 9.

² MAYER, R. *Pensamiento, resolución de problemas y cognición*. Barcelona, Paidós, 1986, p. 21.

se genere determinada disposición, valoración, confianza, interés, perseverancia y curiosidad ante cualquier situación a la que los individuos se vean enfrentados. «El afecto y la cognición no son procesos interdependientes, sino que se interpretan, como lo hacen la masa y el peso, forman parte de la realidad de la experiencia humana»³.

Las condiciones externas proporcionan fuerza motivacional para el progreso intelectual, de suerte que circunstancias temporales y sociales contribuyen a la formación de creencias, actitudes y emociones que son utilizadas para dar respuestas según el pensamiento afectivo (McLeod, 1992)⁴.

Según Piaget⁵, el pensamiento ante todo es una forma de acción en constante proceso de diferenciación y organización. Depende de la forma en que la persona se representa el mundo, es decir, de las maneras en que puede actuar o manipular sobre esa representación interna.

Bajo esta concepción se impone la necesidad de «dejar de considerar a aquellos que aprenden y sus conductas, como producto de los estímulos ambientales que reciben, para considerarlos como individuos con planes, intenciones, metas, ideas, memorias y emociones que usarán activamente para atender, seleccionar y dar significado a los estímulos y

obtener conocimiento de la experiencia»⁶. Los aprendices no son recipientes pasivos de la información, sino que construyen sus conocimientos y habilidades a partir de su conocimiento previo, tanto formal como informal, y de la interacción con sus entornos.

La construcción de conocimiento es un proceso de representación mental de la información a través de imágenes, nociones y conceptos, manipulaciones mentales de la información por medio de operaciones o destrezas intelectuales y disposiciones o actitudes hacia la información, que facilitan o dificultan su representación y manipulación mental. Pensar implica, por consiguiente, una «actitud» que condiciona la intensidad y el esfuerzo, la facilidad y frecuencia con la que se codifica la información, se realizan operaciones mentales sobre esa codificación y se producen resultados.

Si la actitud condiciona las capacidades mentales expresadas en el orden anteriormente mencionado, de forma similar se orienta el desarrollo del pensamiento matemático, convirtiéndolo en un proceso de descubrimiento, interiorización, construcción y desarrollo de ideas, destrezas y actitudes hacia el aprendizaje de las matemáticas. Este proceso requiere de toda una graduación para poder pasar de la acción al pensamiento representativo, y una serie no menos larga de transiciones

³ ELISNER, Elliot. *Procesos cognitivos y currículum*. Barcelona, Martínez Roca, 1987, p. 58.

⁴ McLEOD, Douglas. «Research on affect in mathematics education: A Reconceptualización», p. 575. En: Grows, D. *Hand-Book of research on Mathematics Teaching and Learning*. New York, McMillan, 1992, 812 p.

⁵ DE ARRUBLA, J. *Didáctica y práctica de la Enseñanza*. Bogotá, McGraw-Hill, 1982, p. 76.

⁶ WICTROCK. «Educational Implications of recent research on Learning memory». Paper presented at the annual of the American Educational Research (March, 1982) p. 1-2. Citado por Woolfolk, Anita. *Psicología Educativa*. México, Prentice-Hall Hispanoamericana, 1990, p. 244.

para pasar del pensar a la reflexión sobre dicho pensamiento.

2.2. Pensamiento matemático

Con respecto al pensamiento matemático, Segura (1992) lo considera como: «El razonamiento lógico, la creatividad, el modelaje matemático y las operaciones»⁷. Por su parte, Schoenfeld (1993) indica: «El pensamiento matemático no sólo es razonamiento deductivo, no consiste únicamente en demostraciones formales, como se quiere ver desde una óptica tradicional, en que se considera el conocimiento matemático como un cuerpo de hechos y procedimientos que tratan cantidades, magnitudes, formas y las relaciones que existen entre ellas»⁸. El proceso mental que sugiere qué se debe demostrar, y cómo hacerlo, es una parte de ese pensamiento matemático, tanto como la demostración que eventualmente resulta de él. Lo deductivo es consecuencia a veces instrumental del método matemático.

Las herramientas de las matemáticas son la abstracción, la representación simbólica y/o gráfica y la manipulación simbólica. La actividad creadora es la parte más significativa en el hacer matemático. El proceso creativo implica andar a tientas, conjeturar, hacer hipótesis. Por ejemplo, a fin de comprender un concepto, de resolver un problema, de formular una conjetura, es preciso emplear imagina-

ción, intuición, percepción profunda, emoción, experimentación, asociación fortuita de ideas, deseo, trabajo arduo e inmensa paciencia. La extracción del concepto apropiado de una situación a partir de las cosas observadas, los argumentos inductivos, los argumentos por analogía y los ejemplos intuitivos para una conjetura imprevista, son modos matemáticos de pensamiento.

2.3. Operacionalización del pensamiento matemático

La solución de problemas se constituye en un modo de pensamiento en el cual el individuo debe transferir su bagaje cognitivo y afectivo a la situación problema. La resolución de problemas es un aspecto central de las actividades profesionales a las que nos enfrentamos diariamente. Situándonos en el ámbito de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas compartimos la posición actual que mira la resolución de problemas como el objetivo central de la educación matemática.

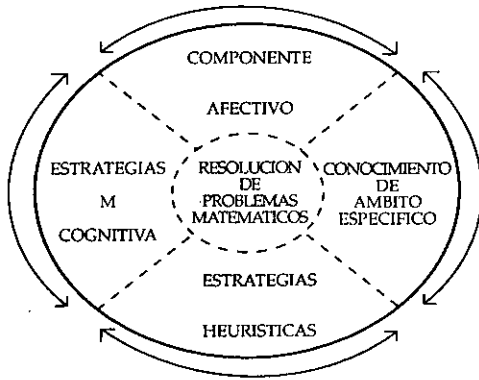
Las principales categorías de aptitudes implicadas en la resolución competente de problemas de matemáticas (conocimientos de ámbito específico, estrategias heurísticas, estrategias metacognitivas y componente afectivo) han sido derivadas de numerosas investigaciones realizadas en este campo. Categorías que engloban el complejo de manifestaciones cognitivas y afectivas que, interpenetrándose, posibilitan la construcción de respuestas a los problemas, como se puede observar en el siguiente diagrama:

⁷ SEGURA, D., ROMERO, J. «Las matemáticas en el aula: posibilidades de construcción significativa», en *Revista Planteamientos* Vol. 1, N° 3, Bogotá, Escuela Pedagógica Experimental.

⁸ CHOENFELD, A. «Learning to think mathematically: Problem Solking, metacognition, and sense making in mathematics», p. 234. En: Grouws, D. *Op. cit.*

Diagrama 1

Estructura para explorar la cognición matemática



2.3.1. *Conocimiento de ámbito específico.* Las investigaciones realizadas en torno a esta categoría han encontrado que los conocimientos especializados o específicos para resolver problemas forman una base que debe tener las siguientes características:

- Conceptos útiles para describir los objetivos de interés en sus dominios y los principios o teoremas que relacionan tales conceptos.
- Los conceptos y principios deben estar acompañados de un conocimiento explícito: condiciones de aplicabilidad que especifiquen cuándo un concepto o principio se podría usar adecuadamente.
- Procedimientos operativos que especifiquen cómo pueden aplicarse los conceptos y principios para resolver los problemas.

- Procedimientos algorítmicos, o sea, conjuntos de reglas bastante elaboradas que automáticamente generen una respuesta.
- Conocimientos intuitivos e informales que la persona despliega sin necesidad de algún razonamiento. La intuición no sólo se agiliza para provocar y/o facilitar algún razonamiento de descubrimiento.
- Esquemas o patrones que engloban una serie de acciones mentales o físicas que actúan coordinadamente cuando son activados por la experiencia física o lógico-matemática. Tratar de entender un problema sin un esquema apropiado es un proceso lento y difícil, es como perderse en un pueblo desconocido, sin tener mapa (Woolfolk, 1990)⁹. Los esquemas de la base del conocimiento no son suficientes; cuando la situación que se presenta va más allá de lo familiar, se necesita de estrategias significativas que pueden ayudar a descubrir un camino correcto de solución.

En relación con los conocimientos específicos, no es suficiente que tan ricos en contenido, y lógicamente, consistentes sean, sino que tan bien organizados se encuentren, para facilitar el acceso a ellos.

2.3.2. *Estrategias heurísticas.* La heurística o arte de inventar es el estudio de los métodos y reglas de descubrimiento; se ha cultivado desde la época de Euclides (IV a. de J.C.) en la que por lo menos se

⁹ WOOLFOLK, Anita. *Psicología Educativa*. México, Prentice-Hall Hispanoamericana, 1990, p. 258.

sabía de algunas estrategias mentales que facilitaban el abordaje y solución de problemas de geometría. Pappus, célebre matemático griego, quien vivió probablemente hacia el año 300 a. de J.C., escribió en el séptimo libro de sus *collections* un tema que denominó *Analyomenos*, y que G. Polya tradujo por «arte de resolver problemas», «Tesoro de análisis», o incluso por «Heurística». He aquí un fragmento de la traducción realizada por Polya del texto original:

La heurística, para llamarla por su nombre, es en resumen, una doctrina especial para el uso de aquellos que, tras haber estudiado los elementos ordinarios, desean dedicarse a la solución de problemas matemáticos. Es la obra de tres hombres: Euclides, autor de «Elementos», Apollonius de Perga y Aristaeus el «mayor». (Pappus, siglo III a. de J.C.)¹⁰.

Sin embargo, lo que sí es nuevo es el énfasis puesto en las estrategias para comprender los procesos de pensamiento en la solución de problemas matemáticos.

Los métodos heurísticos son estrategias sistemáticas de búsqueda para el análisis y transformación del problema. En palabras de Polya: «Provocan las operaciones intelectuales particularmente útiles para la solución de problemas»¹¹. Las estrategias heurísticas no garantizan por sí solas la solución del problema, pero sí aumentan la probabilidad de éxito. Además, poseen la cualidad de poder aplicarse a múltiples problemas dentro de un mismo ámbito, y aun de ser transferidas a contextos dife-

rentes, aunque este último no es fácil ni inmediato.

Polya, en su clásico tratado, empleó la palabra «heurística» para connotar el razonamiento inductivo y analógico que conduce a soluciones verosímiles, en contraposición a los desarrollos deductivos de pruebas rigurosas.

La forma adecuada de entender los heurísticos de Polya es hacerlo en el marco de su modelo prescriptivo de solución de problemas, que distingue cuatro fases:

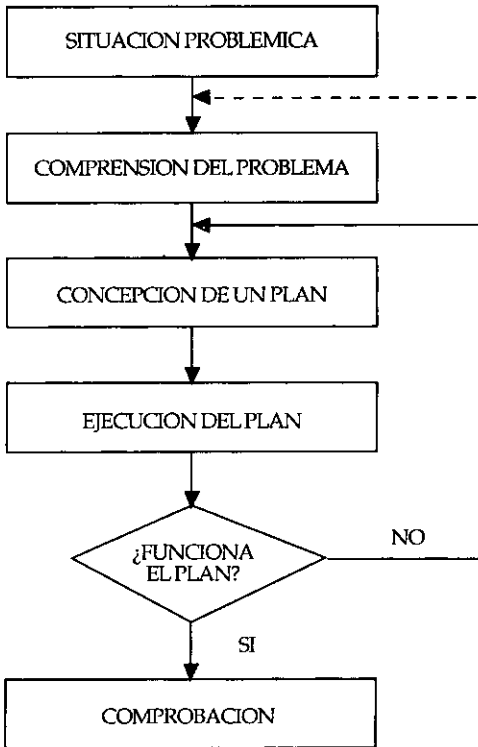
- a. Comprender el problema.
- b. Idear un plan: Incluye la formulación de una estrategia general, no de una prueba detallada. La formulación de una estrategia de este tipo constituye un proceso inductivo, no deductivo. Esto es importante, porque Polya sostiene que, en contra de la apariencia, las matemáticas constituyen un proceso inductivo.
- c. Ejecutar el plan: Aquí es donde se desarrolla la prueba detallada y se lleva a cabo el razonamiento deductivo.
- d. Verificar los resultados.

Esta estrategia directiva general se muestra en siguiente flujograma:

¹⁰ POLYA, G. *Cómo plantear y resolver problemas. Un nuevo enfoque del método matemático*. México, Editorial Trillas, 1965, p. 133.

¹¹ *Ibid*, p. 26.

Estrategia directiva general para la resolución de problemas según G. Polya



Los heurísticos para comprender o representar el problema se pueden resumir en:

- Analizar cuidadosamente el problema especificando los elementos conocidos y desconocidos; es decir, hay que cerciorarse de que se conoce la incógnita, los datos y las condiciones que relacionan esos datos.
- Trazar un gráfico o diagrama e introducir la notación adecuada. La intención de este heurístico es concretar el

problema, representarlo visualmente, de modo que se puedan evidenciar la existencia de determinadas relaciones, que de otro modo pasarían inadvertidas.

- Enunciar el problema de otra forma: Si una manera de representar el problema no conduce a la solución, entonces vale la pena tratar de verlo desde una perspectiva diferente.

Los heurísticos que propone Polya para idear un plan implican, en su mayoría, que se recuerde otros problemas afines que ya se sabe cómo resolverlos.

- Si no puede resolver el problema propuesto, trate de resolver primero un problema similar. La intención de este heurístico es utilizar el razonamiento análogo.
- Mire atentamente la incógnita y trate de recordar un problema que le sea familiar, que tenga la misma incógnita o una similar. Este heurístico es útil cuando el universo de la variable es un espacio de n -dimensiones. Entonces se puede considerar un problema similar en un espacio de dos o tres dimensiones, con el objeto de poder visualizar algún camino de solución.
- Considerar un problema relacionado con el que se tiene y que ya se haya resuelto.
- Considerar un problema más particular.
- Considerar un problema más general.
- Sustituir la variable entera por valores específicos (1,2,3,4...). Este heurístico

es particularmente útil en problemas en los que el universo de la variable es el conjunto de enteros positivos. Se trata de obtener una generalización y luego proceder por inducción matemática.

- Descomponer el problema en partes, hasta conseguir problemas de tamaño manejable. Este heurístico tiene la doble utilidad de utilizar tanto el método como el resultado del problema más sencillo para resolver el problema más difícil.

Con respecto a los heurísticos para ejecutar el plan, hay que recordar que Polya considera que ésta es la fase deductiva del proceso, por lo que no presentó heurísticos propiamente dichos.

Los heurísticos para verificar los resultados son muy importantes. Polya considera que existe una tendencia natural, aun en los buenos estudiantes, a darse por satisfechos una vez se ha obtenido la solución del problema. Entre los heurísticos de verificación de resultados menciona los siguientes:

- Tratar de resolver el problema de un modo diferente.
- Verificar las implicaciones de la solución.

Reconsiderar la solución, reexaminar el resultado y el camino que condujo a esa solución, ayuda a consolidar los conocimientos y a desarrollar las aptitudes para resolver problemas.

Las estrategias heurísticas son valiosas herramientas en el campo de la solución de problemas, particularmente cuando se trata de problemas con los que no se

está familiarizados. Sin embargo, estudios realizados por varios investigadores han encontrado resultados que pueden resumirse así: No sólo es lo que sabes, es cómo y cuándo lo usas. Los expertos tienen más que los novatos a proceder a una revisión ejecutiva del proceso en que están implicados, son actores y observadores: trabajan en la solución del problema y se vigilan críticamente mientras lo hacen. Esto nos indica la importancia del componente de la estructura.

2.3.3. *Estrategias metacognitivas.* El término «metacognitivas» fue introducido por los psicólogos para referirse al conocimiento y control de las actividades de pensamiento y aprendizaje. En las concepciones que manejan diversos autores sobre la metacognición se puede observar que coinciden, de una manera u otra, en definirla como el conocimiento que tienen los sujetos acerca de la fortaleza o debilidad de las capacidades cognitivas para la adquisición, el empleo y el control del conocimiento.

Woolfolk, A. (1990)¹² se refiere a la metacognición como la capacidad para saber qué hacer, cómo y cuándo en la ejecución de una tarea específica.

Donald Meichenbaum y sus colaboradores (1985) han descrito la metacognición como: «*estar consciente de la propia maquinaria cognitiva y de cómo funciona*»¹³.

Nickerson, R. (1990)¹⁴ plantea que la

¹² WOOLFOLK, A. *Op. cit.*, p. 76.

¹³ MENCHENBAUM, D. *et al.* «Metacognitive assesment». Yussen (Ed.). *The growth or reflection in children*. Academic Press. Citado por: WOOLFOLK, A. *Op. cit.* p. 76.

¹⁴ NICKERSON, R. *et al.* *Enseñar a pensar*. Barcelona, Paidós, 1987, p. 125.

metacognición es el conocimiento sobre el conocimiento e incluye el conocimiento de las capacidades y limitaciones de los procesos de pensamiento.

Flavell (1978)¹⁵ define la sustancia del conocimiento metacognitivo a través de tres tipos de variables y sus interacciones respectivas:

1. *Variables personales*, que comprenden todo lo que uno podría decir de sí mismo y de las demás personas consideradas como seres cognitivos.
2. *Variables de la tarea*, que se refieren al conocimiento de lo que implican las características de una tarea cognitiva, en cuanto a las dificultades de ésta y el mejor modo de enfocarla.
3. *Variables de la estrategia*, que implican el conocimiento de los méritos relativos de los diferentes enfoques en una misma tarea cognitiva.

En el mismo sentido, Villarini *et al.* (1991)¹⁶ presentan la metacognición como la capacidad que tiene el pensamiento para examinarse a sí mismo y que le permite al ser pensante estar consciente de los procesos que ocurren mientras piensa. Plantean que la metacognición tiene tres elementos: la autorregulación, el control ejecutivo y el control del conocimiento.

¹⁵ FLAVELL, J. *Cognitive monitoring*. Texto presentado en la Conferencia sobre técnicas orales comunicativas de los niños. Universidad de Wisconsin. Oct. 1978. Citado por Nickerson, R. *et al.* Op. cit., p. 125.

¹⁶ VILLARINI, A. *et al.* *La enseñanza orientada al desarrollo del pensamiento*. S.l. s.n. 1997, p. VI-8.

La autorregulación está relacionada con la dedicación, la atención y las actitudes. La dedicación es la energía que se le dedica a una tarea, y puede ser controlada; la atención se relaciona con lo que se privilegia, el ser humano puede enviar mensajes a sí mismo en términos de lo que debe ser atendido; la actitud es la predisposición negativa o positiva hacia un problema específico y que influye en el proceso de pensamiento.

El control ejecutivo tiene que ver con la planificación, el control y la evaluación de las estrategias y del mismo proceso de pensamiento, verificar si las estrategias planificadas se han ejecutado y ajustar el proceso de acuerdo a los obstáculos y resultados que se van encontrando. El proceso de control ejecutivo es cíclico y simultáneo.

El control del conocimiento se refiere al estar consciente del conocimiento que se tiene y del que se necesita para abordar una determinada tarea, además de las maneras de procesar la información, que resultan efectivas en dicha tarea. Esto quiere decir que el control del conocimiento está relacionado con las respuestas a las siguientes preguntas: ¿qué conozco?, ¿qué necesito conocer?, ¿cuándo y por qué puedo utilizar este conocimiento? y ¿cómo puedo utilizarlo?

Estos elementos metacognitivos fueron los que utilizamos para el análisis de dicho componente en los procesos de pensamiento que desarrollaron los sujetos de la investigación en la resolución de los problemas. Pensamos que estos tres elementos se articulaban bien con las categorías expuestas anteriormente: conocimientos de ámbito específico y estrategias heurísticas como con el componente afec-

tivo que a continuación resumiremos.

2.3.4. *Componente afectivo.* Los aspectos afectivos juegan un papel central en el aprendizaje e instrucción matemáticos. Los comentarios respecto al gusto (u odio) hacia las matemáticas son tan comunes como los reportes de notas o de actividades instruccionales, y estas observaciones informales soportan la opinión de que el afecto juega un papel significativo en dicho aprendizaje.

El componente afectivo se referirá a un amplio rango de actitudes, sentimientos y temperamentos, que van a estar generalmente relacionados detrás del dominio del conocimiento.

En el contexto educativo, hablar de educación conlleva hablar del perfeccionamiento de la persona, lo que implica considerar su forma de ser, de relacionarse con su ambiente, de construir conocimiento, por lo que consideramos primordial el estudio de las actitudes con que los estudiantes abordan la tarea de resolución de problemas matemáticos.

Gairin (1988), en su estudio sobre las actitudes en educación, se refiere a ellas como: «instancias que nos predisponen y dirigen sobre los hechos de la realidad; representan una síntesis personal que filtra nuestras percepciones y orienta nuestro pensamiento»¹⁷, de esta manera se facilitaría o se impediría la adaptación de la persona al contexto.

La actitud hacia determinada actividad puede ser positiva y negativa, es

decir, una persona puede estar bien o mal predispuesta y prejuiciada hacia determinada situación, particularmente hacia la resolución de los problemas matemáticos.

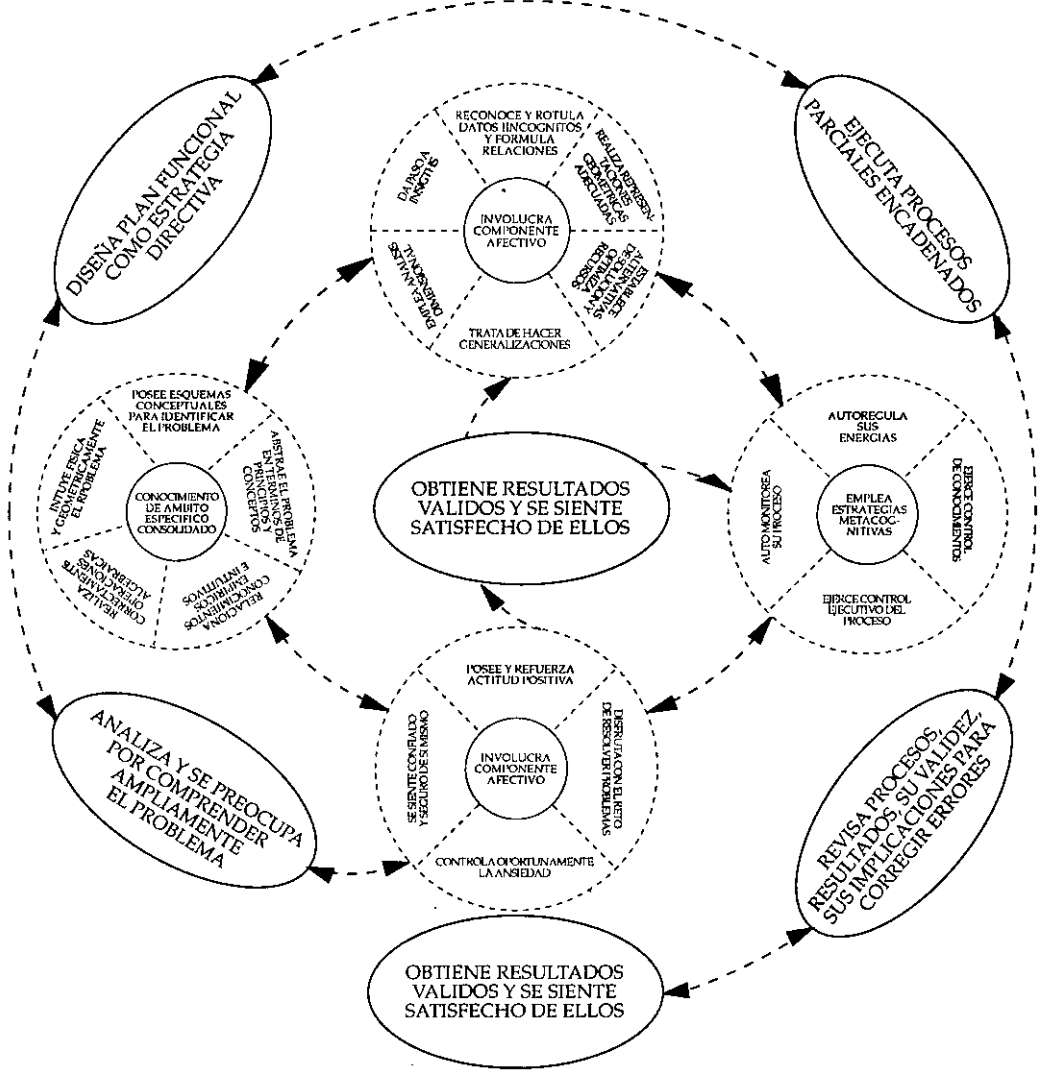
En este estudio se tuvieron en cuenta las actitudes hacia las matemáticas, conscientes de que hasta los conceptos abstractos se asocian en nuestras mentes con sentimientos y emociones. Por ejemplo, se califican los teoremas como «fuertes» o «débiles»; de los números se dice que son «fríos», «serios». De igual manera, los procesos de percepción, comprensión, inducción son llevados a cabo con «ánimo» o «desánimo», «apertura» o «bloqueo», etc.

El agrado, la confianza, la motivación, la ansiedad y las creencias hacia las matemáticas son aspectos determinantes de las actitudes con que los estudiantes abordan la tarea de resolver problemas matemáticos, razón por la cual fueron considerados como elementos esenciales para la construcción de una escala, actitud que sirvió de apoyo para aproximarnos a la comprensión de los estados afectivos de los sujetos en el abordaje de esta tarea.

A continuación se muestra un diagrama más detallado de la estructura para la exploración de la cognición matemática:

¹⁷ GAIRIN, J. *Las actitudes en educación*. Barcelona, P.P.V., 1988, p. 123.

Estructura para la exploración de la cognición en la resolución de problemas en matemáticas



3. Metodología

En esta investigación se realizó un estudio cualitativo de los procesos de pensamiento que desarrollan estudiantes del Ciclo Básico de Ingenierías de la Universidad del Norte, en la resolución de pro-

blemas matemáticos, concernientes a la asignatura Cálculo I, procesos de naturaleza compleja que fueron analizados con la ayuda del modelo teórico sobre el pensamiento y la cognición matemática expuesto previamente.

Para aproximarnos a este propósito se escogió la modalidad de estudio de casos, para de esta manera seguir más de cerca estos procesos de un modo profundo y exhaustivo, con el objeto de obtener un conocimiento más amplio y detallado.

Se recogieron datos de índole cualitativa: grabaciones, observaciones, entrevistas, autobiografías en relación con el aprendizaje de las matemáticas, escala de actitud hacia la resolución de problemas matemáticos, los cuales permitieron analizar con mayor amplitud el complejo de manifestaciones cognitivas y afectivas.

Aunque el estudio de casos presenta limitaciones en cuanto a sus posibilidades de generalización, esperamos que los resultados obtenidos se constituyan en un aporte valioso en el ámbito de la educación matemática, una pauta que oriente la búsqueda de nuevas estrategias de acción dirigidas a propiciar el aprendizaje significativo de las matemáticas.

Se seleccionaron nueve estudiantes de la población estudiantil del Ciclo Básico de Ingenierías, todos de sexo masculino, de acuerdo con los siguientes criterios: nivel de estudios y rendimiento académico.

Fueron escogidos tres estudiantes por cada uno de los semestres, segundo, tercero y cuarto, según su rendimiento académico en matemáticas: alto, intermedio y regular.

Los instrumentos y técnicas para la recolección y análisis de la información se recogen en la siguiente tabla:

Instrumentos y técnicas metodológicas para la recolección de información

PROBLEMAS MATEMATICOS	RETROSPECCION		
	RESOLUCION EN VOZ ALTA		
TRANSCRIPCIONES DE LAS GRABACIONES DE LAS SESIONES DE RESOLUCION DE PROBLEMAS			
ESCALA DE ACTITUD (TIPO LIKERT) HACIA LOS PROBLEMAS MATEMATICOS	AGRADO		
	CONFIANZA		
	MOTIVACION		
	ANSIEDAD		
	CREENCIAS		
MATRIZ DE ANALISIS			
CONOCIMIEN- TOS DE AMBITO ESPECIFICO	ESTRATEGIAS HEURISTICAS	COMPONEN- TE METACOGNITIVO	COMPONEN- TE AFECTIVO
INFORMACION ADICIONAL			
<ul style="list-style-type: none"> - ENTREVISTAS PERSONALES - OBSERVACION DIRECTA DURANTE LA RESOLUCION DE PROBLEMAS - AUTOBIOGRAFIA DEL APRENDIZAJE DE LAS MATEMATICAS 			

El trabajo realizado se desarrolló en cinco sesiones individuales de resolución de problemas relativos a las temáticas que consideramos relevantes: Ecuaciones lineales, geometría analítica bidimensional, máximos y mínimos de funciones y razones de cambio relacionadas. En cada sesión, cada estudiante participó en la resolución de dos problemas; en el desarrollo del primer problema se utilizó la técnica de retrospección, y en el segundo, la resolución en voz alta. Considerando que en el orden inverso los estudiantes inicialmente experimentaban cierto grado de intranquilidad, lo que podría llegar incluso a bloquear el proceso. Se observó que a medida que fueron transcurriendo

las sesiones los estudiantes se sintieron en un clima de mayor confianza, lo cual favoreció el desarrollo de la investigación.

Para el desarrollo de cada una de estas sesiones se siguieron tres etapas: la escogencia de los problemas de acuerdo a las necesidades propias del aprendizaje de Cálculo I. La aplicación de estos problemas sin previa información de la temática pertinente. En esta etapa alguno de los miembros del equipo de investigación siempre estuvo presente, a fin de realizar las grabaciones de audio respectivas, al mismo tiempo que se registraban el comportamiento afectivo de cada estudiante a nivel de manifestaciones físicas externas que proporcionasen indicios relativos a su estado emocional, así como el empleo de conocimientos de ámbito específico, estrategias heurísticas y metacognitivas desplegadas en el proceso para acumular informaciones complementarias que contribuyesen al análisis posterior. La etapa de análisis propiamente se realizó bajo previa audición y transcripción de las grabaciones realizadas durante las sesiones de trabajo, con base en la matriz de análisis que se construyó teniendo en cuenta las categorías estudiadas.

4. Conclusiones

Sin pretender establecer conclusiones definitivas y generales acerca de los procesos de pensamiento desarrollados por estudiantes del Ciclo Básico de Ingenierías en la resolución de problemas matemáticos, se mencionan las manifestaciones más relevantes, con el fin de aportar al conocimiento de estos procesos, para hacer más viable el aprendizaje de las matemáticas, calificado tradicionalmente de complejo e inaccesible.

Cada uno de los casos analizados presentó una actitud altamente favorable y de apertura hacia las matemáticas, iniciada en el seno familiar, donde los nexos entre sus progenitores o parientes con las matemáticas eran estrechos. Algunos de éstos son profesionales de la Ingeniería o la docencia matemática, circunstancia que motivó a estos estudiantes a sentir predilección por esta materia en el ámbito de las Ingenierías. Esta interacción les ayudó altamente a la formación de concepciones acerca de esta ciencia, e influyó en su predisposición positiva hacia el aprendizaje de las mismas y en la escogencia de su carrera.

Tales actitudes fueron reforzándose, en la medida en que su desempeño académico fue alcanzando altos niveles, lo cual les hizo merecedores de alta credibilidad en el círculo de sus compañeros, quienes acudían a favorecerse de sus explicaciones, y aun de sus profesores, quienes, reconociendo sus cualidades, contribuyeron a fomentar en ellos un mayor nivel de compromiso hacia la materia, imponiéndose en algunos el reto de involucrarse en la resolución de problemas matemáticos.

Pese a estos antecedentes, a través del estudio se fueron particularizando los comportamientos de cada uno de los casos en la resolución de los problemas, coincidiendo en la mayoría de ellos con sus niveles de rendimiento académico, que se tuvieron en cuenta para su escogencia.

En relación con las categorías estudiadas (conocimiento de ámbito específico, estrategias heurísticas, estrategias metacognitivas y componente afectivo), los casos se movieron dentro de un continuo, des-

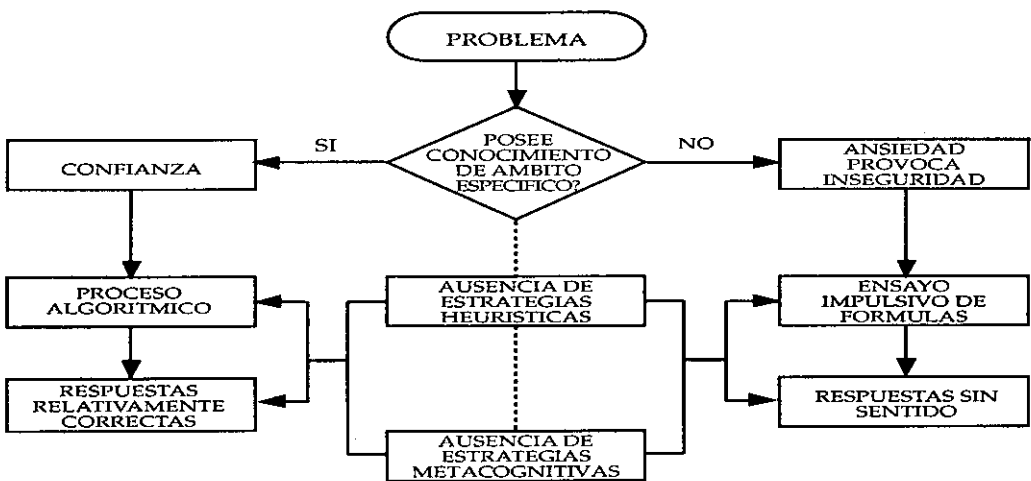
de aquellos cuyos conocimientos matemáticos no han sido apropiados mediante procesos de construcción y reflexión — ya que sus reacciones ante la resolución de problemas mostraron hábitos de ensayo y error relativos al manejo de símbolos sin el ejercicio de ninguna estrategia de control, la ausencia de estrategias heurísticas y metacognitivas que les impidieron reconocer qué conocimientos se necesitaban, cómo y cuándo aplicarlos— hasta aquellos cuyas manifestaciones en la resolución de problemas son comparables a la de los «expertos», la calidad de sus conocimientos indicó un alto nivel de comprensión que les ha permitido construir una base sólida de esquemas, estrategias heurísticas y metacognitivas que se han ido entretejiendo en una red que se fortalece en la medida en que se van generando nuevos conceptos y procesos para abordar problemas matemáticos y construir nuevos conocimientos.

A pesar de que todos los casos presentaron una actitud positiva hacia la resolución de problemas matemáticos, sin embargo, en la mayoría de ellos se presentó

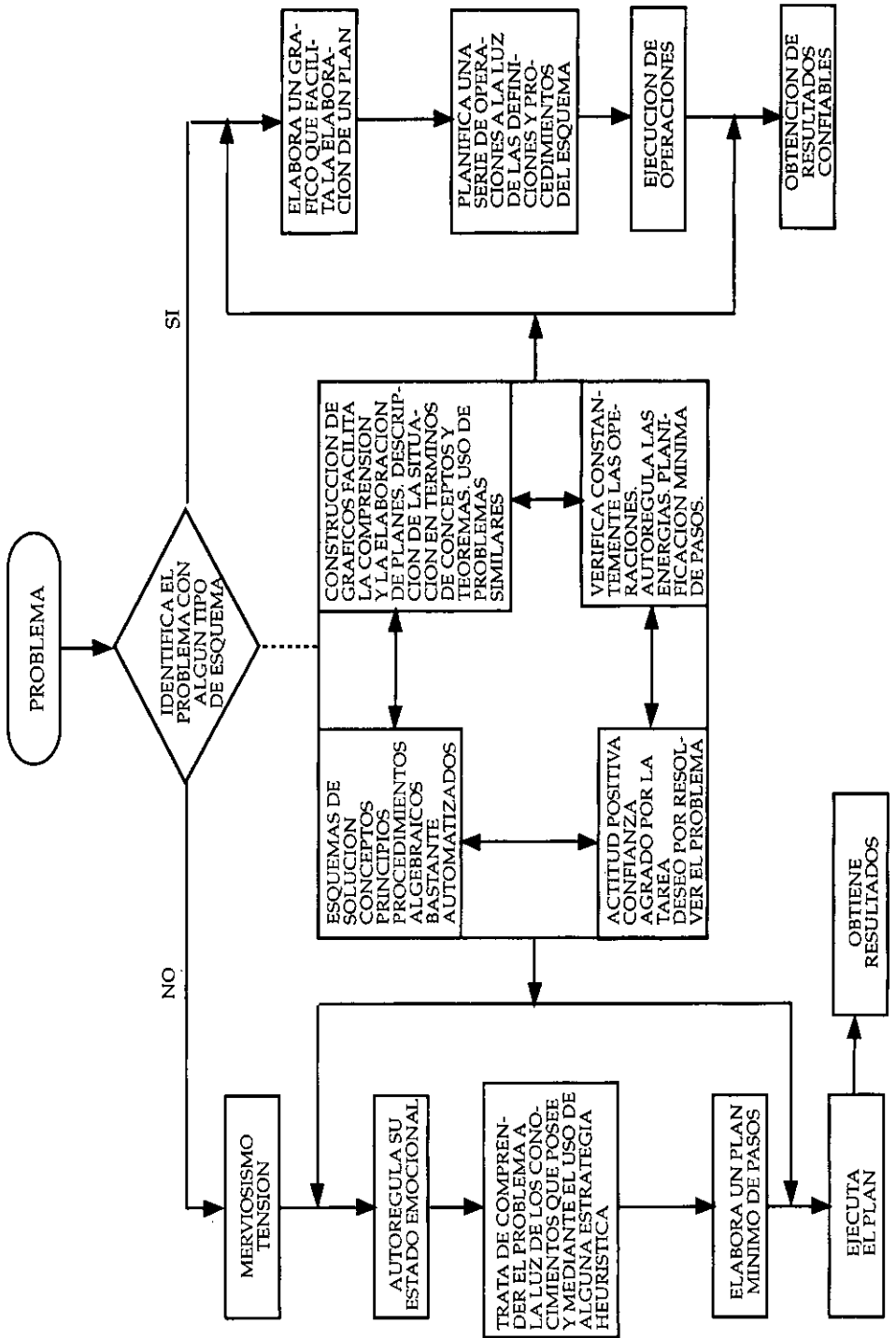
un conflicto emocional cuando al leer el problema querían hacer algo y no podían, quizás por no contar con una base sólida, de conocimientos, lo cual creó en algunos un bloqueo insuperable. Los procesos afectivos influyeron en los estudiantes, dependiendo de lo que sucedía en los primeros momentos del proceso, es decir, si durante ese primer lapso lograban comprender el problema, reforzaban su motivación, confianza y energías para proseguir en la solución del mismo. Si, por el contrario, la comprensión del problema se tornaba difícil, entraban en estado de nerviosismo, lo cual provocaba rigidez en la manera de plantear hipótesis alternativas de solución, y esto, a su vez, dificultaba el proceso hasta bloquearlo. Influyeron, así mismo, en el estado emocional, acontecimientos acaecidos en la interacción de los estudiantes con sus entornos familiar y académico, que en algunos de los casos provocaron abandono de la tarea.

A continuación se presentan las síntesis aproximadas de los procesos más frecuentes que caracterizaron a algunos de los casos analizados en el estudio:

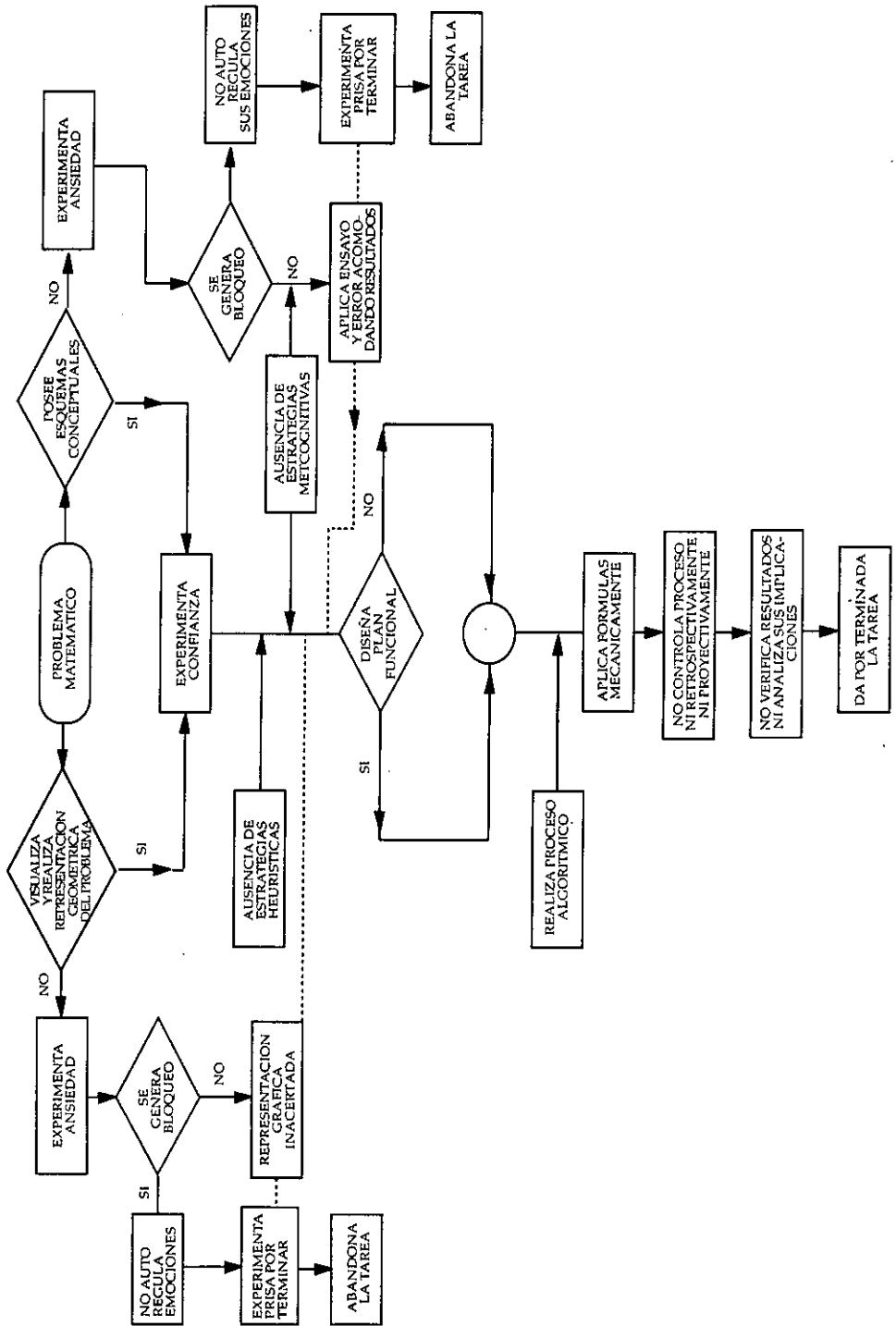
SINTESIS DEL ANALISIS DEL CASO F.H.



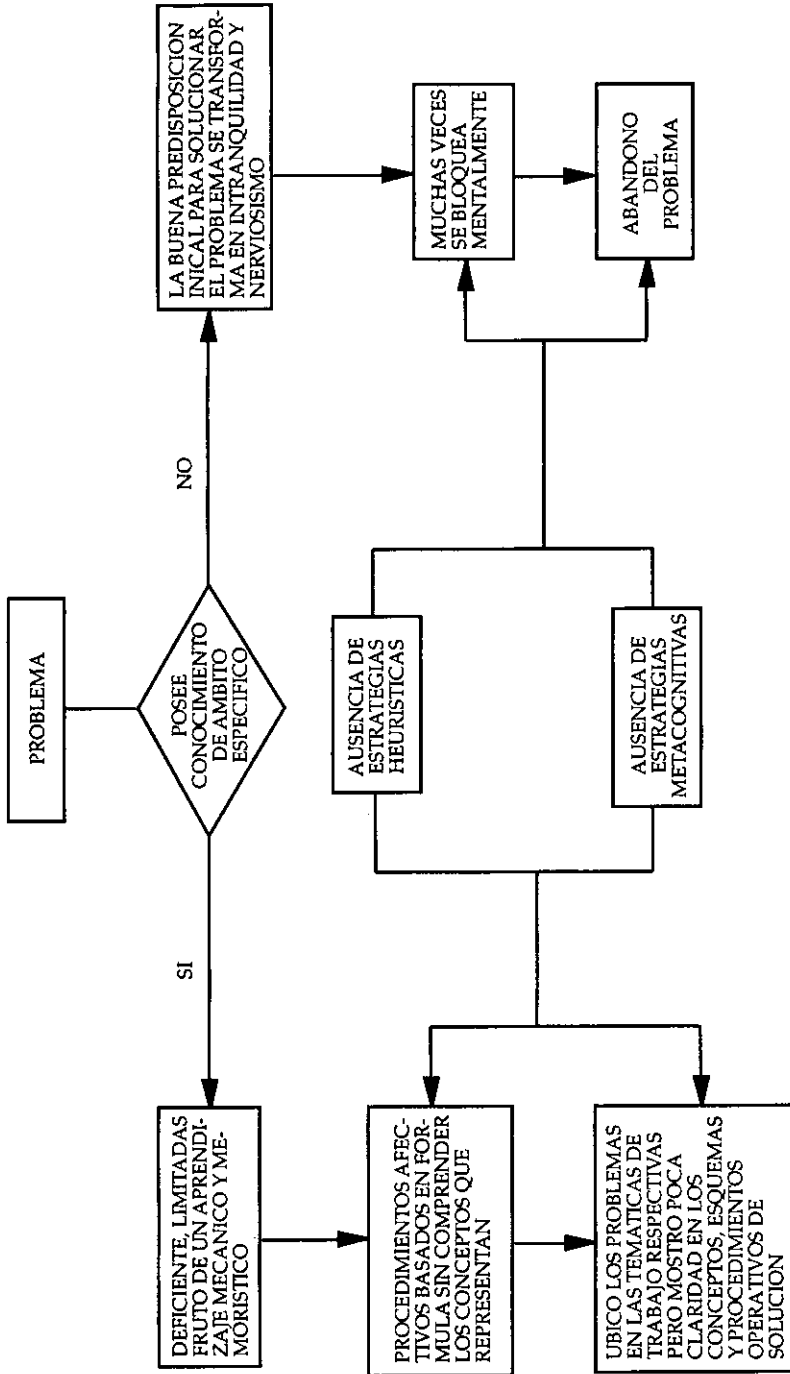
SINTESIS APROXIMADA DEL PROCESO R.C.



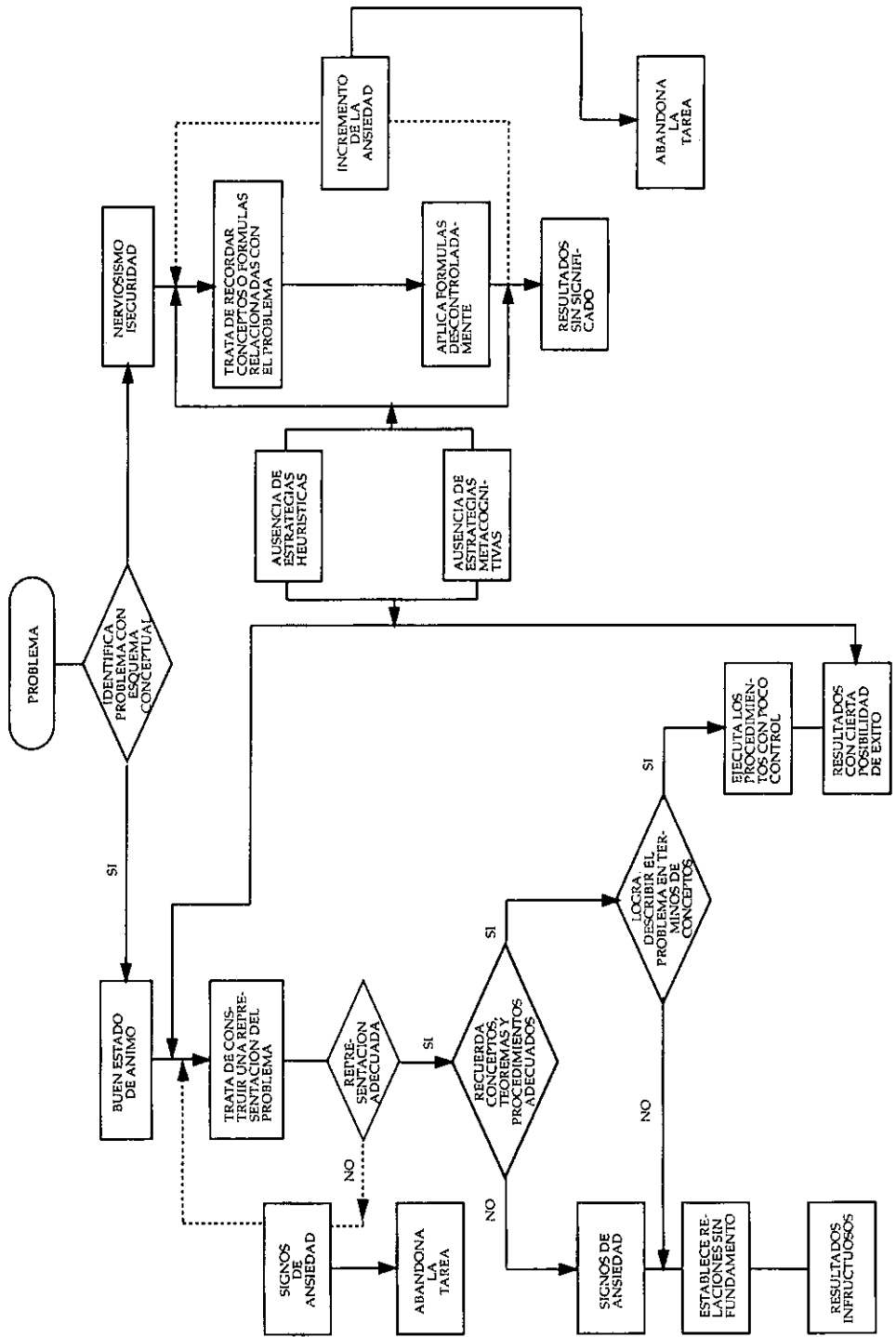
SINTESIS APROXIMADA DEL PROCESO A.R.



SINTESIS APROXIMADA DEL PROCESO L.C.



SINTESES APROXIMADA DEL PROCESO A.C.



El siguiente listado resume las características entre las cuales estuvieron los procesos desarrollados por los estudiantes en la resolución de problemas de la asignatura Cálculo I:

- Categorizan con facilidad, identificando conceptos, principios y procedimientos, lo que los lleva a construir una formulación matemática del problema.
- Poseen claridad conceptual y capacidad para establecer relaciones.
- Poseen habilidad, precisión y seguridad en el manejo de procedimientos algebraicos y algorítmicos requeridos en la solución de los problemas.
- Han desarrollado cierta capacidad para intuir física y geoméricamente las situaciones problemas, lo que les facilita la comprensión de éstas.
- Presentan dificultades para abstraer la situación planteada en términos de principios y conceptos y por tanto en la formulación matemática del problema.
- Recuerdan nombres y fórmulas, pero no propiamente conceptos.
- Experimentan inseguridad en el manejo de los procedimientos rutinarios, lo cual les lleva a cometer errores de carácter operativo.
- No realizan esfuerzos por intuir física y geoméricamente el problema, prefieren ensayar fórmulas sin ningún control.
- Han desarrollado su capacidad especial, para representar gráficamente (en el plano y en el espacio) las situaciones planteadas en los enunciados verbales.

- Utilizan el gráfico como estrategia heurística introduciendo en él, notaciones adecuadas que contribuyen a evidenciar y construir relaciones fundamentales para la solución del problema.

- La organización de los conocimientos es flexible y móvil con gran número de conexiones, lo cual les permite recordar y recuperar con facilidad la información almacenada en la memoria, para emplearla en diversas situaciones.
- Poseen una estrategia directa general que engloba: Diseño de un plan, ejecución y verificación de resultados.
- No traducen (o les es difícil hacerlo correctamente), la representación verbal o simbólica a la representación gráfica.
- Presentan limitaciones en la interpretación gráfica, lo que restringe la comprensión y la construcción de relaciones fundamentales.
- La organización de sus conocimientos se asemeja a un sistema de éstos, lo que dificulta el acceso a la información (definiciones, teoremas, etc.), lo cual, a su vez, genera un desgaste de energías que provocan bloqueo emocional y cognitivo.
- Su comportamiento es impulsivo, no se detiene a planificar una secuencia mínima de pasos.
- Poseen estructuras de conjunto construidas a través de un proceso continuo de reflexión englobado en el círculo comprensión-explicación-comprensión.
- Construyen hipótesis alternativas para obtener inicialmente una comprensión amplia del problema, identificar una exi-

gencia final y con ello tomas las medidas operativas necesarias para llegar a la solución final.

- Demuestran alto grado de atención y dedicación a la tarea de resolver problemas, revisando constantemente sus procedimientos y resultados parciales, para constatar la validez y coherencia lógica del procedimiento, las implicaciones de los resultados, con el fin de llegar a establecer generalizaciones.

- Usan el análisis dimensional como estrategia de control del proceso y de los resultados.

- Su base de conocimientos parece estar constituida por un conjunto de operaciones parciales y hábitos relativos al manejo mecánico de fórmulas.

- No analizan otras posibilidades de solución, lo que les impide establecer nuevas consideraciones cuando sus primeros intentos resultan infructuosos.

- Pierden fácilmente la concentración en el desarrollo del proceso, desviando su atención hacia detalles no significativos, en lugar de analizar la coherencia y validez de su razonamiento.

- No utilizan el análisis dimensional ni con el proceso ni en los resultados.

- Ejercen control sobre su estado emocional, con el fin de distraer su atención ni disminuir la confianza en sus potencialidades.

- Dan muestras de poseer una alta motivación, deseo de disfrutar y superar el reto de resolver problemas.

- Experimentan con facilidad estado de ansiedad inhibitorio que favorece el bloqueo cognitivo y afectivo, que lo llevan al abandono de la tarea.

- La resolución de problemas se ha convertido en una tarea a la cual no desean enfrentar.

5. Recomendaciones

Con el propósito de promover líneas de acción tendientes a la construcción de una didáctica que se centre en las acciones del que aprende, que propicie el desarrollo del pensamiento y el aprendizaje de un conocimiento matemático construible mediante la resolución de problemas, establecemos las siguientes consideraciones:

- Planificar y desarrollar un seminario permanente de profesores en el cual se discutan las teorías acerca de la naturaleza, enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

- Diseñar y aplicar «formas» que propicien el desarrollo de estrategias para resolver problemas de matemáticas. Un programa eficaz para mejorar o desarrollar las capacidades de los estudiantes para resolver problemas debe guiarles:

- * A tomar un tiempo adecuado para la reflexión previa, tratando de construir el sentido del problema.

- * A ubicarse con atención y claridad en todas las situaciones que plantea el problema.

- * A planificar el procedimiento que se debe seguir.

* A la concentración permanente, evitando la precipitación acerca de la respuesta.

* A pensar en nuevas maneras de solución, o bien plantear estrategias de búsqueda, pero con base a un conocimiento de ámbito específico regulado y controlado, evitando de esta manera el ensayo mecánico de fórmulas.

* A adquirir habilidad sobre algunos procedimientos generales para la resolución de problemas.

* A ampliar y a reestructurar la base de conocimientos.

* A una interacción dinámica entre los conceptos matemáticos y los procesos.

* A «sentir» el problema a través de la representación gráfica que ayude al surgimiento de ideas o posibles caminos de solución.

* A crear problemas a partir de los ya conocidos.

* A transferir la estructura de un problema y su solución a diferentes contextos.

* A volver sobre el problema. El hábito metacognitivo determina favorablemente un control adecuado y una evaluación formativa o por etapas en la medida en que se avance en el proceso, y garantiza resultados favorables. Además, conduce a analizar detalladamente lo que se hace antes de aceptarlo.

Esta nueva apertura reforzará el comportamiento recursivo que vayan adoptando los estudiantes en la medida en que

resuelven problemas matemáticos, y sus resultados les llevarán a valorar que no sólo es lo que lleguen a saber, sino cómo, cuándo y cómo lo utilizan, ayudándoles a desarrollar habilidades de autorregulación durante la solución de problemas matemáticos, como también a ser auto-críticos, con base en reflexiones detalladas sobre los aciertos y desaciertos en la resolución de problemas matemáticos.

El proceso evaluativo debe fundamentarse en indagar sobre qué están haciendo los estudiantes, esto es, si son capaces de describir o trabajar sobre el proceso planteado, cómo lo están haciendo y cómo lo encajan dentro de la solución.

Una sugerencia relativa a la metodología de trabajo en el aula es la siguiente:

- a. Clases «teóricas»: exposiciones para presentar e ilustrar el uso de metodologías para resolver problemas propuestos por distintos autores: Polya, Schoenfeld, Newell y Simón.
- b. «Talleres». En los cuales el profesor modela la conducta de «ver» y representar un problema, explica las dificultades de «ver» el problema sólo a través de su enunciado verbal y aclara cómo usar la estrategia directiva general elegida y los heurísticos pertinentes.

Los estudiantes se organizan en grupos de trabajo, designando un protocolante que escriba las soluciones a los problemas planteados. Después se hace una puesta en común en la que cada grupo presenta y explica su proceso de solución.

A su vez, el profesor da realce a las diferentes representaciones, con el fin de establecer comparaciones entre los dife-

rentes procesos realizados. Finalmente, realiza un proceso de retroalimentación y asigna problemas adicionales.

El seminario y los talleres en el aula son procesos que se nutren mutuamente, para incorporar al trabajo nuevas estrategias heurísticas y metacognitivas y fundamentarlas teóricamente con el fin de configurar bases sólidas que soporten nuestra práctica pedagógica en el ámbito de la educación matemática.

Bibliografía

CARRETERO, Mario, GARCIA, J. *Lecturas de Psicología del pensamiento. Razonamiento de problemas y Desarrollo Cognitivo*. Madrid, Editorial Alianza, 1980.

DECORTE, Erik. *La mejora de las habilidades de la resolución de problemas matemáticos. Hacia un modelo de intervención basado en la investigación*. Ponencia presentada en el I Congreso Internacional de Psicología y Educación: Intervención Psicoeducativa. Madrid, 1991.

ELISMER, Elliot. *Procesos cognitivos y currículum*. Barcelona, Martínez Roca, 1987.

MAYER, R. *Pensamiento, resolución de problemas y cognición*. Barcelona, Paidós, 1986.

McLEOD, Douglas. «Research on affect in mathematics education: A Reconceptualization». En Grows, D. *Hand-Book of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York, MacMillan, 1992.

NICKERSON, Raymond *et al.* *Enseñar a pensar*. Barcelona, Paidós, 1987.

ORTON, Anthony. *Didáctica de las Matemáticas. Cuestiones, teoría y práctica en el aula*. Ministerio de Educación y Ciencia. Centro de Publicaciones Ciudad Universitaria, s/n, Madrid, Ediciones Morata, 1990.

PIAGET, Jean. *Psicología de la Inteligencia*. Buenos Aires, Editorial Psique, 1980.

POLYA, George. *Cómo plantear y resolver problemas*. México, D.F., Editorial Trillas, 1965.

RICO, Luis *et al.* *Didáctica activa para la resolución de problemas*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada, 1988.

SCHOENFELD, Allan. «Sugerencias para la enseñanza de la resolución de problemas matemáticos». En: M.E.C. *La enseñanza de la matemática al debate*. Madrid, 1985.

_____. «Ideas y tendencias en la resolución de problemas». En: M.E.C. *La enseñanza de la matemática al debate*. Madrid (sin editorial), 1985.

_____. «Learning to Think matematically: problem solving, and sense making in mathematics». En: Grows, D. *Hand-Book of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York, MacMillan, 1992.

VILLARINI, Angel *et al.* Departamento de Instrucción Pública de Puerto Rico (D.T.P.). *Manual para la enseñanza del pensamiento* (ed. preliminar) San Juan, 1991.

_____. *El pensamiento crítico y lo afectivo* (sin año, sin lugar, sin editorial).

WOOLFOLK, Anita. *Psicología educativa*. México, Prentice-Hall Hispanoamericana, 1990.