Condiciones de frontera en el método de los elementos finitos

Néstor Durango *

Introducción

El fundamento para la solución de problemas físicos mediante métodos numéricos es el correcto planteamiento y la adecuada solución de un sistema de *n* ecuaciones, que permitan determinar los valores que toma la variable de trabajo en *n* puntos discretos o nodos.

Estas ecuaciones se plantean para cada uno de los nodos, y son de la forma

$$Ci\varnothing i + Ca\varnothing a + Cb\varnothing b + Cd\varnothing d + Ce\varnothing e + Cf\varnothing f = 0$$

donde:

$\varnothing j$ es la variable o función que se va a determinar;

Cj son coeficientes, cuyos valores dependen de la posición relativa de los nodos vecinos a,b,d,e,f respecto del nodo i.

Los Cj también dependen de la condición del nodo i: nodo interior, o nodo de frontera.

Una de las dificultades que se presenta en la solución de los problemas físicos mediante métodos numéricos es la determinación de los coeficientes relacionados con los nodos de frontera. Esto es particularmente cierto cuando se utilizan los métodos de diferencia finita y de elementos finitos, en los cuales se adoptan técnicas que requieren mucho cuidado para su correcta aplicación; pero aún así se cometen errores de lógica y de programación cuando se sistematizan estos métodos.

El propósito de este artículo es presentar las ecuaciones que permitan determinar los coeficientes Cj para los nodos interiores y para los de frontera, de una foma que muestren la secuencia que facilite al usuario del método de elementos finitos plantear los algoritmos para su sistematización.

La aplicación de las ecuaciones que se presentan aquí se limita a los problemas físicos que involucren la determinación de una función potencial $\varnothing$ en una región o campo R. Esta situación se presenta, por ejemplo, en flujo de fluidos con potencial, transferencia de calor por conducción, flujo de cortante en un medio continuo, corriente en un campo eléctrico, donde se cumple que:

$$\nabla^2 \varnothing = 0$$

En casos sencillos se puede determinar analíticamente el valor de $\varnothing$ en la región R; o se puede hallar gráficamente su va-

* Ingeniero Mecánico. Magíster en Sistemas de Generación de Energía Eléctrica. Actualmente profesor de las cátedras Mecánica de fluidos y Transferencia de calor.

Ingeniería & Desarrollo. Universidad del Norte. 1: 24-28, 1995

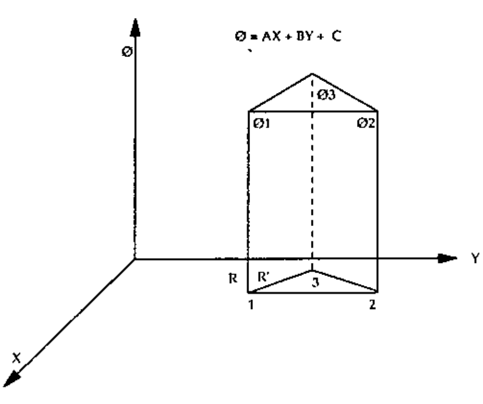
lor, si no se requiere de mucha exactitud; o mediante el uso de métodos numéricos, en casos más complejos.

Método de los elementos finitos

Cuando se emplea este método, se divide la región R en subregiones R′. A mayor número de subregiones, mayor exactitud, pero mayor complejidad en el planteamiento y en la solución del problema.

Las subregiones están separadas por segmentos de recta, y éstos concurren en los nodos; así que cada nodo está asociado con varias subregiones, y cada subregión está asociada con varios nodos.

Con el método de los elementos finitos se supone que $\varnothing$ varía en cada subregión, de acuerdo con la relación



que es la ecuación de un plano. A,B,C, son constantes en cada subregión y sus valores dependen de los valores de $\varnothing$ en los nodos asociados con R′.

Si R′ está asociada con los nodos 1,2,3, entonces

$$\varnothing 1 = AX1 + BY1 + C,$$
$$\varnothing 2 = AX2 + BY2 + C,$$
$$\varnothing 3 = AX3 + BY3 + C.$$

Este sistema de ecuaciones se puede resolver para A y B; si el determinante del sistema es:

$$D = X1(Y2 - Y3) + X2(Y3 - Y1) + X3(Y1 - Y2), \text{ entonces:}$$

$$A = [\varnothing 1(Y2 - Y3) + \varnothing 2(Y3 - Y1) + \varnothing 3(Y1 - Y2)] / D,$$

$$B = [\varnothing 1(X2 - X3) + \varnothing 2(X3 - X1) + \varnothing 3(X1 - X2)] / D.$$

Coeficientes de los nodos interiores

La aplicación de $\nabla^2 \varnothing = 0$ en R′ conduce a:

$$\partial A/\partial X + \partial B/\partial Y = 0,$$

que se cumple si:

$$A\partial D/\partial X + B\partial D/\partial Y = 0.$$

Para un nodo i, asociado a varias subregiones, se cumple entonces que:

$$\Sigma\, [A(\partial D/\partial X)i + B(\partial D/\partial Y)i] = 0.$$

Desarrollando la expresión anterior para el nodo i, que está asociado con las subregiones delimitadas por los nodos vecinos a,b,d,e,f, resulta:

$$Ci\varnothing i + Ca\varnothing a + Cb\varnothing b + Cd\varnothing d + Ce\varnothing e + Cf\varnothing f = 0.$$

Donde los coeficientes Cj se obtienen de:

$$Ci = (Ya - Yb)^2 + (Yb - Yd)^2 + (Yd - Ye)^2$$

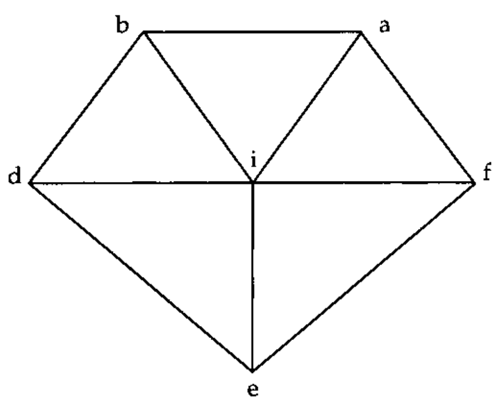
$+ (Ye - Yf)^2 + (Yf + Ya)^2 + (Xa - Xb)^2$
$+ (Xb - Xd)^2 + (Xd - Xe)^2 + (Xe - Xf)^2$
$+ (Xf - Xa)^2$.

$Ca =$ $(Yi - Yf)(Yf - Ya) + (Ya - Yb)(Yb - Yi)$
$+ (Xi - Xf)(Xf - Xa) + (Xa - Xb)(Xb - Xi)$.

$Cb =$ $(Yi - Ya)(Ya - Yb) + (Yb - Yd)(Yd - Yi) + (Xi - Xa)(Xa - Xb) + (Xb - Xd)(Xd - Xi)$.

...

$Cf =$ $(Yi - Ye)(Ye - Yf) + (Yf - Ya)(Ya - Yi)$
$+ (Xi - Xe)(Xe - Xf) + (Xf - Xa)(Xa - Xi)$.



En cada coeficiente Cj están relacionadas las coordenadas X y Y de los nodos vecinos al nodo j.

Es así como en Ci aparecen relacionadas las coordenadas X e Y de todos los nodos vecinos de i: a, b, d, e, y f.

Y en Ca, por ejemplo, aparecen relacionadas las coordenadas de los nodos vecinos al nodo a: i y f.

Condiciones de frontera

El sistema de *n* ecuaciones con *n* incógnitas obtenido de aplicar la condición $\nabla^2 \varnothing = 0$ en los *n* nodos de la región R, tiene solución no trivial si se dan condiciones consistentes de frontera.

Condiciones de frontera de primera clase

Las cumplen los nodos con potencial conocido; son fronteras de primera clase en transferencia de calor, las superficies con temperatura conocida; en flujo de fluidos con potencial y en flujos en medios porosos, lo son las superficies impermeables.

Esta condición de frontera se tiene en cuenta escribiendo para el nodo j la ecuación

$$\varnothing j = \text{constante}$$

Condiciones de frontera de segunda clase

Las cumplen los nodos en los cuales se conoce el gradiente del potencial, como por ejemplo, superficies con flujo de calor conocido en transferencia de calor; secciones transversales donde se conoce la velocidad media, en flujo de fluidos con potencial, y en flujos en medios porosos.

Un caso especial se tiene cuando el gradiente del potencial es cero: superficies adiabáticas en transferencia de calor.

Esta condición de frontera se tiene en cuenta aplicando:

$$(\partial \varnothing / \partial n)k = V = \text{constante},$$

al nodo k de la figura, en dirección *n*.

De la ecuación anterior se deduce que en cada subregión asociada al nodo k se cumple que:

$$A + B = V;$$

Para todas las subregiones asociadas al nodo k se cumple entonces que:

$$\Sigma (A + B) = \Sigma V.$$

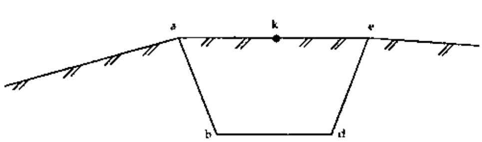
Al desarrollar la expresión anterior se obtiene:

$$Ck\emptyset k + Ca\emptyset a + Cb\emptyset b + Cd\emptyset d + Ce\emptyset e = V\,Rk.$$

Donde los coeficientes Cj se obtienen de:

$$Ck = (Ya - Ye) - (Xa - Xe);$$
$$Ca = (Yb - Yk) - (Xb - Xk);$$
$$Cb = (Yd - Ya) - (Xd - Xa);$$
$$Cd = (Ye - Yb) - (Xe - Xb);$$
$$Ce = (Yk - Yd) - (Xk - Xd).$$

$$Rk = Xk(Ya - Ye) + Xa(Yb - Yk) + Xb(Yd - Ya) + Xd(Ye - Yb) + Xe(Yk - Yd).$$



Se puede observar que en Ck se relacionan los nodos a y e, vecinos de k, y que también son nodos frontera, pero no se relacionan los nodos interiores b y d.

En Ca se relacionan los nodos b y k, vecinos de a; en Ce se relacionan los nodos k y d, vecinos de e.

En el coeficiente del nodo interior Cb se relacionan los nodos d y a; y para el coeficiente Cd se relacionan los nodos b y e; pero ni en un caso ni en el otro se relaciona el nodo k.

Condiciones de frontera de tercera clase

Esta condición la cumplen los nodos en los cuales se conoce la relación del potencial con su gradiente. Es el caso de superficies convectivas en transferencia de calor; secciones transversales donde se conocen tanto la velocidad media como la presión, en flujos con potencial y flujos en medios porosos.

En las fronteras de tercera clase se aplica $(O/n)k = -(h/k)Ok$ al nodo k, mostrado en la figura anterior, obteniéndose como resultado:

$$(Ck + Rk\,[h/k])\emptyset k + Ca\emptyset a + Cb\emptyset b + Cd\emptyset d + Ce\emptyset e = 0$$

Condición especial de frontera

Se consideran especiales las condiciones de los nodos vecinos a un sumidero o a una fuente infinita, donde se conocen tanto el potencial como su gradiente.

En esta clase de fronteras se aplica $\nabla^2\emptyset = 0$ al nodo m, asociado con los nodos a, b, d, e, obteniéndose como resultado:

$$Cm\emptyset m + Ca\emptyset a + Cb\emptyset b + Cd\emptyset d + Ce\emptyset e = 0.$$

Los coeficientes en la ecuación anterior son:

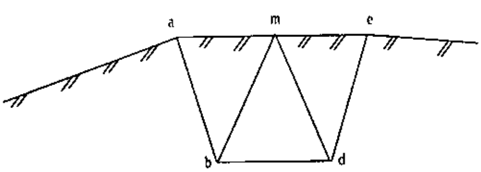
$$Cm = (Ya - Yb)^2 + (Yb - Yd)^2 + (Yd - Ye)^2 + (Xa - Xb)^2 + (Xb - Xd)^2 + (Xd - Xe)^2.$$

$$Ca = (Ya - Yb)(Yb - Ym) + (Xa - Xb)(Xb - Xm).$$

$$Cb = (Ym - Ya)(Ya - Yb) + (Yb - Yd)(Yd - Ym) + (Xm - Xe)(Xa - Xb) + (Xb - Xd)(Xd - Xm).$$

$$Cd = (Ym - Yd)(Yb - Yd) + (Yd - Ye)(Ye - Ym) + (Xm - Xd)(Xb - Xd) + (Xd - Xe)(Xe - Xm).$$

$$Ce = (Ym - Yd)(Yd - Ye) + (Xm - Xd)(Xd - Xe).$$



En el coeficiente propio, Cm, están relacionados todos los nodos vecinos al nodo m: a, b, d, e. En los demás coeficientes se relacionan las coordenadas de los nodos vecinos.

Conclusiones

Cuando se usa el método de los elementos finitos para resolver problemas físicos con potencial es importante identificar con certeza las diferentes clases de frontera involucradas en el problema.

Definidas las clases de frontera, se pueden plantear las ecuaciones de nodos correspondientes, siguiendo con cuidado las relaciones secuenciales de cada coeficiente.

La regla es que en cada coeficiente Cj se relacionen las coordenadas X y Y de los nodos vecinos a j; pero en las condiciones de segunda y tercera clase de frontera, el criterio de vecindad es especial.

Es posible sistematizar parcialmente, o en su totalidad, el planteamiento del problema y su solución utilizando herramientas computacionales sencillas.

Bibliografía

G. SOTELO. *Hidráulica General*. México, Limusa, 1976.

KARLEKAR. *Transferencia de Calor*. México, Interamericana, 1986.