

# Control Dinámico Matricial

## Fundamentación y estrategias de implementación

Marco E. Sanjuán Mejía \*

---

### Resumen

*En este artículo se presenta el Control Dinámico Matricial (DMC) como una estrategia avanzada de control para sistemas SISO (una entrada, una salida) y MIMO (Múltiples entradas, múltiples salidas). Se hace una revisión de la fundamentación matemática de esta estrategia (Mínimos Cuadrados), se describe su filosofía de implementación, y se presentan recomendaciones de implementación basadas en resultados de investigaciones actuales. Los conceptos son ilustrados a través de un caso de aplicación: Un tanque de agitación con calentamiento por vapor.*

**Palabras claves:** Control de procesos, Control Dinámico Matricial, DMC, simulación.

### Abstract

*This paper shows the Dynamic Matrix Control (DMC) as an advanced control strategy for SISO system (single input, single output) and MIMO (multiple inputs, multiple outputs). A review of mathematical foundation of this strategy (minimum squares) is made; it is also described its implementation philosophy and some recommendation for implementing it are presented which are based on present researches results. Concepts are illustrated by using an application case: a vapor heated stirring tank.*

**Key Words:** Process control, dynamic matrix control, DMC, simulation.

Fecha de recepción: Septiembre de 1998

## 1. Introducción

Las condiciones de producción de los últimos años han llevado a los ingenieros de planta a ser más exigentes con sus procesos. Esta exigencia se demuestra en límites más estrictos de control, procesos flexibles que puedan operar confiablemente bajo diferentes condiciones

---

\* Profesor Asistente del Departamento de Ingeniería Mecánica de la Universidad del Norte. Candidato a *Master of Sciences in Engineering Sciences*, con énfasis en Control y Robótica, en University of South Florida, en Tampa, E.U. (Dirección: Universidad del Norte, Departamento de Ingeniería Mecánica, Km. 5 Autopista a Pto. Colombia, Barranquilla, Colombia. Email: msanjuan@guayacan.uninorte.edu.co)

de producción, exigencia de rechazo de perturbaciones y tolerancia a las no linealidades, típicas de nuestra realidad.

Este hecho ha motivado que los investigadores en el área de control de procesos busquen, día a día, estrategias de control más robustas, agresivas, multivariables, flexibles e inteligentes.

La estrategia más común en el entorno industrial es el Control por Retroalimentación PID. A pesar de que el concepto de retroalimentación se viene usando desde las aplicaciones de control de nivel de agua con boya por los griegos en el año 300 a.C. (Mayr, 1971), ha sido más que suficiente en muchos casos para satisfacer los requerimientos de las plantas de proceso. Pero, primero, dichos requerimientos están cambiando, y segundo, la idea de implementar mayores niveles de "inteligencia" en los sistemas de control requiere otras filosofías de decisión.

El control de procesos basado en modelos, combinado con técnicas de implementación que faciliten el trabajo del ingeniero de planta, está ganando terreno, especialmente en aplicaciones donde los pequeños ahorros se convierten en grandes cantidades de dinero gracias a la economía de escala. El Control Dinámico Matricial (DMC) es una de estas estrategias avanzadas que, con el conocimiento apropiado, puede ser implementada en procesos industriales, con sistemas que van desde un Pc hasta un Dcs.

## 2. Control Dinámico Matricial (DMC)

La idea básica que soporta al DMC es el principio de superposición. Si nosotros conocemos cómo responde el sistema ante un cambio en la señal del controlador (variable manipulada), y sabemos cómo deseamos que cambie la variable de proceso (variable controlada), podemos encontrar la señal del controlador necesaria para generar ese cambio. De igual manera, si conocemos cómo una perturbación, que podemos medir, afecta a la variable de proceso, podemos encontrar una señal del controlador que anule ese cambio.

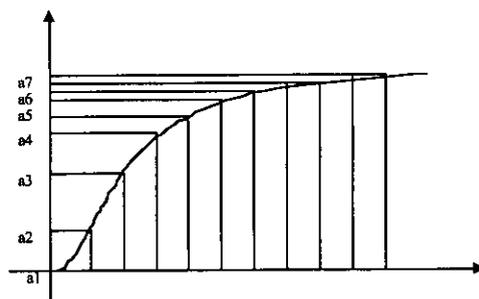


Fig. 1. Muestreo de la Respuesta del Sistema

Si proyectamos ese principio en un horizonte de tiempo definido, tenemos la curva de respuesta característica del sistema a un cambio en el controlador, la curva de cambio deseada o el cambio que se predice debido a una perturbación, y necesitamos conocer la señal del controlador. Si representamos las curvas como vectores de datos mues-

treados (Cutler y Ramaker, 1986), con un tiempo uniforme (ver figura 1), podemos plantear la siguiente ecuación vectorial:

$$A \times x = e, \quad (1)$$

Donde  $A$  es el vector que representa la respuesta del sistema por unidad de señal del controlador,  $x$  es el cambio requerido de señal del controlador para compensar el error que se predice, y  $e$  es el error que se predice debido al cambio en el valor de referencia del controlador o a la perturbación que se está midiendo. Esta ecuación se puede ver como:

$$\begin{bmatrix} a1 \\ a2 \\ a3 \\ a4 \end{bmatrix} \times [x] = \begin{bmatrix} e1 \\ e2 \\ e3 \\ e4 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Como se observa, estamos enfrentados a un sistema de ecuaciones con solución vacía, para  $A$  y  $e$  linealmente independientes. Esto indica que no es posible hallar un  $x$  tal que se anule exactamente la desviación. Pero lo que sí se puede lograr es minimizar el residuo, de manera que el resultado de la superposición sea lo más cercano a cero. Para ello definimos:

$$r = Ax - e \quad (3)$$

y nos concentramos en hallar una solución para  $x$  que minimice  $r$ , o lo que es equivalente, la suma del cuadrado de los residuos,  $r^T \times r$  (Cutler y Ramaker, 1979):

$$\frac{\delta (r^T \times r)}{\delta x} = 0$$

$$\frac{\delta [(Ax - e)^T \times (Ax - e)]}{\delta x} = 0 \quad (4)$$

$$A^T \times (Ax - e) = 0$$

$$A^T Ax - A^T e = 0$$

$$A^T Ax = A^T e$$

$$x = (A^T A)^{-1} \times A^T e$$

Este resultado es extensible a las siguientes variaciones del modelo:

- Se desea predecir un horizonte de respuestas del controlador ( $w$  respuestas).  $A$  se convierte en una matriz de  $w$  columnas y  $n+w-1$  filas, donde  $n$  es el número inicial de filas de  $A$ .
- Se desea aplicar el modelo a un sistema MIMO.  $A$  es un conjunto de submatrices, cada una generada por una pareja variable manipulada-variable controlada.
- Implementación de un factor de supresión que reduzca la agresividad del controlador, suavizando el movimiento de la válvula o elemento final de control.
- Implementación de pesos relativos entre las variables controladas, para penalizar más el error en la variable controlada más crítica.

Para más detalles ver Cutler y Johnston, 1987.

### 3. Sistema objetivo

El siguiente sistema (figura 2) se ha seleccionado para la implementación de un controlador DMC Siso, con el propósito de ilustrar los conceptos explicados.

La variable controlada en el proceso es la Temperatura de homogeneización al interior del tanque; la variable manipulada es el porcentaje de apertura de la válvula de vapor saturado, y la perturbación que se mide es el flujo de entrada del compuesto que se va a homogeneizar (Smith y Corripio, 1997).

Para llevar a cabo la simulación del sistema utilizando SIMULINK, se plantearon las ecuaciones de estado transitorio que describen el comportamiento del sistema:

- Líquido en el Tanque:

$$pc_p T_f f(t) + U_n A_n [T_s(t) - T(t)] - pc_p T(t) f(t) = p V c_p \frac{dT(t)}{dt}$$

1 eq., 2 inc. [  $T_s, T$  ]

- Serpentin de Calentamiento:

$$w(t)[h_x - h_f] - U_o A_o [T_s(t) - T(t)] = C_m \frac{dT_s(t)}{dt}$$

2 eq., 3 inc. [w]

- Válvula Isoporcentual:

$$\tau_v \frac{dw(t)}{dt} + w(t) = K_v m(t) \therefore K_v = \frac{\ln(\alpha)}{100} \times \bar{w}$$

3 eq., 4 inc. [m]

- Sensor/Transmisor (100-200°F):

$$\tau_r \frac{dc(t)}{dt} + c(t) = T(t) - 100$$

4 eq., 5 inc. [c]

- Referencia (Set Point):

$$r(t) = T^{SET}(t) - 100$$

5 eq., 6 inc. [r]

- Controlador (DMC):

$$m(t) = DMC\_Algorithm[r(t), c(t), f(t)]$$

6 eq., 6 inc. [OK]

Una de las ventajas de DMC es que permite implementar fácilmente el control por adelanto, ya que sólo basta con medir la perturbación y añadir una suma de matrices al algoritmo. Por eso en este caso el modelo del controlador incluye  $f(t)$ , el flujo de compuesto que entra al sistema. Para condiciones de estado estable véase la tabla 1.

### 4. Implementación de DMC

Para la implementación de la estrategia de control DMC se necesita efectuar los siguientes pasos, teniendo en cuenta que nuestro objetivo es implementar control en un sistema Siso adicionando control por adelanto:

- Hallar la curva característica de respuesta de la salida del transmisor ante un cambio en la salida del controlador.
- Determinar la curva característica de respuesta de la salida del transmisor ante un cambio en la perturbación medida.
- Determinar el tiempo de muestreo.
- Determinar el tamaño de la muestra.

**Tabla 1.** Condiciones de Estado Estacionario y parámetros de diseño del sistema

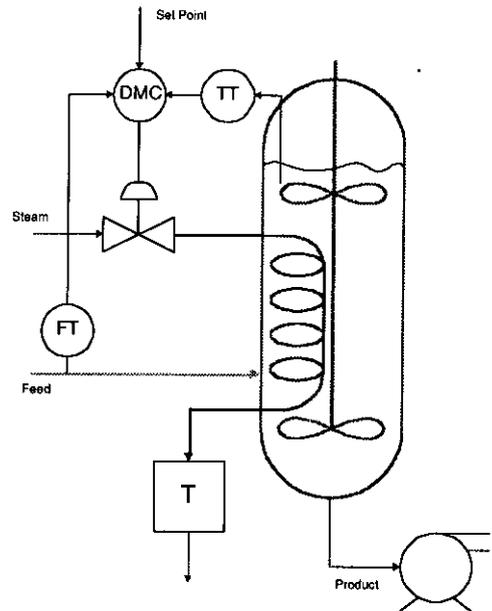
Variable	Valor E.E.
$T_i$	100°F
$T^{SET}$	150°F
$T_s$	230.4°F
$f$	15 ft <sup>3</sup> /min
$V$	120 ft <sup>3</sup>
Vapor	
$P_s$	30 psia
$h_{fg}$	966 BTU/lbm
Serpentín	
$L$	205 ft.
Día Nom.	4 in
Espesor	SCH 40
$C_p$	0.12 BTU/lbm °F
$S_L$	10.8 lb/ft
$U_0$	2.1 BTU/min ft <sup>2</sup> °F
Compuesto	
$\rho$	68 lbm/ft <sup>3</sup>
$C_p$	0.80 BTU/lbm °F
Sensor	
$\tau_T$	0.75 min
Válvula	
$\alpha$	50
$\tau_v$	0.20 min

- Determinar el horizonte de control, es decir, el tamaño del vector de salida del controlador que se desea predecir.
- Construir la matriz  $A$ , que representa la respuesta del sistema ante un cambio en la salida del controlador.
- Construir el vector  $F$ , que representa

la respuesta del sistema ante un cambio en la perturbación que se mide.

- Implementar el algoritmo de control DMC, utilizando el método de mínimos cuadrados.

Siguiendo la anterior metodología, se obtuvieron los siguientes resultados intermedios:

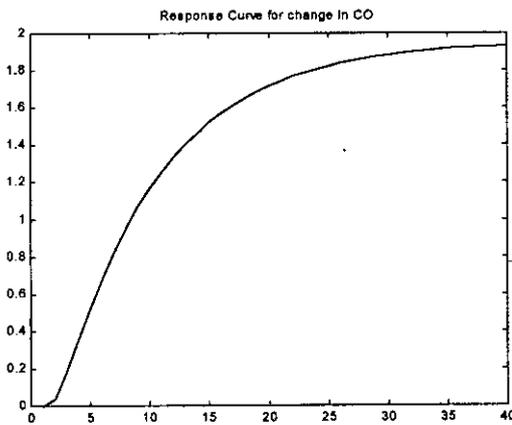


**Fig. 2.** Curva de respuesta en la salida del transmisor ante un aumento unitario en la salida del controlador.

En las figuras 3 y 4 observamos que el tiempo máximo de estabilización es 40 minutos. De aquí concluimos que la constante de tiempo del sistema es aproximadamente  $\tau=8$  min. (Smith y

Corripio, 1997). Los experimentos realizados demuestran óptimo resultado cuando se utiliza un tiempo de muestreo entre  $0.1$  y  $0.2 \tau$ . En este caso,  $1 \text{ min.} \leq T_s \leq 2 \text{ min.}$

En esta aplicación se trabajó con  $T_s=2$  min. El tiempo total de muestreo no debe exceder  $3\tau$ , porque muchos valores en la matriz A y el vector F cercanos al valor de estabilización hacen el algoritmo numéricamente poco agresivo. El tiempo total de muestreo se seleccionó  $T_T=20$  min. De esta manera obtenemos un vector de 11 datos.

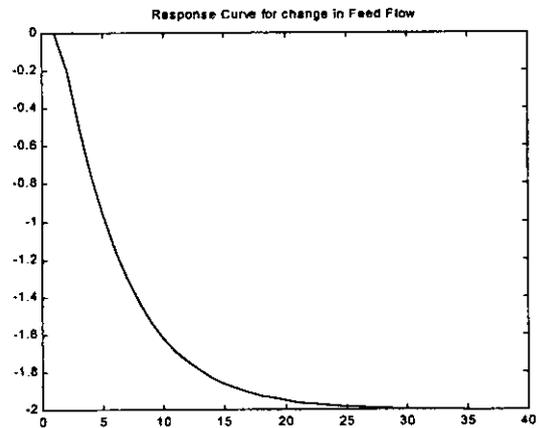


**Fig. 3.** Curva de respuesta en la salida del transmisor ante un aumento unitario en la salida del controlador

Para las pruebas se trabajó con un horizonte de predicción de una unidad. Como consecuencia, A y F son vectores de  $11 \times 1$  (ver tabla 2).

**Tabla 2.** Datos muestreados cada 2 minutos de la respuesta del transmisor ante A, cambio en la señal del controlador, y F, cambio en la perturbación.

A	F
0.0000	0.0000
0.1745	-0.4910
0.5232	-1.0271
0.8260	-1.4286
1.0665	-1.7213
1.2560	-1.9341
1.4052	-2.0887
1.5225	-2.2011
1.6149	-2.2828
1.6876	-2.3421
1.7847	-2.3853



**Fig. 4.** Curva de respuesta en la salida del transmisor ante un aumento unitario en la perturbación que se mide

Este horizonte se justifica, ya que no

deseamos restarle agresividad al controlador seleccionando un horizonte mayor, y una predicción es suficiente para generar una curva de respuesta suave.

Si se hubiera querido implementar un horizonte de predicción de tres unidades, A y F quedarían tal como se presentan en la tabla 3.

Al implementar el algoritmo de control DMC se obtuvo la siguiente respuesta del sistema:

Posteriormente se simuló un cambio en la perturbación (Flujo de alimentación al tanque), y se obtuvieron los siguientes resultados:

**Tabla 3.** Matriz A de respuesta del sistema, y vector F de cambio de perturbación, adecuados para la predicción de salida del controlador con horizonte de tres unidades

	A		F
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.1745	0.0000	0.0000	-0.4910
0.5232	0.1745	0.0000	-1.0271
0.8260	0.5232	0.1745	-1.4286
1.0665	0.8260	0.5232	-1.7213
1.2560	1.0665	0.8260	-1.9341
1.4052	1.2560	1.0665	-2.0887
1.5225	1.4052	1.2560	-2.2011
1.6149	1.5225	1.4052	-2.2828
1.6876	1.6149	1.5225	-2.3421
1.7447	1.6876	1.6149	-2.3853
0.0000	1.7447	1.6876	-2.3853
0.0000	0.0000	1.7447	-2.3853

## 5. Conclusiones

Como se puede observar, la curva de salida del controlador DMC es suave, lo cual causa un movimiento suave en la válvula, condición favorable para aumentar la vida útil del sistema de control.

Adicionalmente, la implementación de una estrategia multivariable no requiere re-escritura de código, ventaja que ofrece muy pocas estrategias de control. Un aspecto que sí es necesario tener presente es el incremento del horizonte de predicción y la incorporación de un factor de supresión, de tal manera que la respuesta del controlador multivariable no sea muy agresiva, tal como suele suceder en la mayoría de los casos si no se incorporan dichos parámetros.

A nivel de implementación se pueden presentar las siguientes recomendaciones:

- El tiempo de muestreo es un parámetro que determina el tipo de respuesta en lazo cerrado del controlador DMC. La recomendación hecha durante este artículo, de trabajar con 0.1 o 0.2 veces la constante de tiempo del sistema, es válida para procesos con respuesta característica de primero o segundo orden. Cuando se presenta respuesta inversa es necesario seleccionar un tiempo de muestreo que permita incorporar en el modelo la respuesta inversa de la variable de proceso.

- El tiempo total de muestreo también afecta la respuesta del controlador. Si los vectores (o matrices) con los cuales se implementa el controlador DMC incluyen muchos datos del período ya estable de la respuesta, el controlador perderá mucha agresividad, lo cual causa un tiempo de estabilización en lazo cerrado considerablemente grande.
- La simulación del modelo no-lineal permite realizar pruebas confiables para predecir el comportamiento en campo del algoritmo de control. El modelaje a través de funciones de transferencia (lineales) no es una práctica recomendable, ya que el principio de superposición se encuentra incorporado en el modelo.
- La estrategia de Control Dinámico Matricial, DMC, es un esquema de control basado en el modelo del proceso real, por lo tanto su implementación se facilita aun en procesos difíciles de describir analíticamente. Se debe recurrir a ella cuando el control convencional PID no es suficiente, y la proyección de control MIMO es una posibilidad bastante concreta.

### Referencias

- CUTLER, C. R. and B. L. RAMAKER (1979). *Dynamic Matrix Control - A Computer Control Algorithm*. 86<sup>th</sup> National Convention of American Institute of Chemical Engineers, April 4, 1979.
- MARLIN, T. E. (1995). *Process Control. Designing Processes and Control Systems for Dynamic Performance*. New York, McGraw-Hill.
- SMITH, C. A. and A. B. CORRIPIO (1997). *Principles and Practice of Automatic Process Control*, 2<sup>nd</sup> Ed. John Wiley & Sons.