

Diseño a torsión según la Norma NSR-98*

Pedro Therán Cabello**

Resumen

Las Normas Colombianas de Diseño y Construcción Sismo-Resistente, NSR-98, adoptaron para el diseño a torsión el modelo del tubo de pared delgada / cercha espacial plástica.

Este nuevo método es más sencillo de entender y aplicar y es igual de preciso que otros métodos más complejos. En este artículo se presentan las teorías que fundamentan este método y el procedimiento para su aplicación.

El método considera que las secciones sólidas o huecas de los elementos de hormigón reforzado se comportan como tubo, y después del agrietamiento, el tubo es idealizado como una cercha espacial constituido de estribos cerrados, barras longitudinales en las esquinas y diagonales de compresión de concreto centrados en los estribos.

Palabras claves: Torsión, estribos, cerrado, cortante, cercha espacial, modelo del tubo, agrietamiento, pared, momento, membrana, viga.

Abstract

Colombian Standards for Seism -Resistant Design and Building, NSR-98, adopt the model of thin wall / plastic spatial truss tube for torsion design.

This new method is easier to understand and to apply than other more complex methods. Some theories in which this method is based upon and the procedures for its application are provided in this paper.

The method considers that solid or hollow sections of reinforced concrete elements behave as a tube, and after cracking tube is idealized like a space truss made up of blind abutments, longitudinal beams in corners and concrete compression diagonals centered in abutments.

Key words: Torsion, blind abutments, spatial truss, model of tube, cracking, wall, momentum, membrane, beam.

Fecha de recepción: Marzo 15 de 1999

1. INTRODUCCIÓN

La acción de un momento alrededor del eje longitudinal de un miembro produce en él torsión. En una estructura, la torsión se presenta por la excentricidad de las cargas que actúan en el elemento o

* Basado en el artículo «Diseño a Torsión según la Norma NSR-98», del mismo autor, publicado en la *Revista Ingeniería*, N° 35, de la Sociedad de Ingenieros del Atlántico.

** Ingeniero Civil, especialista en Análisis y Diseño de Estructuras de la Universidad del Norte. Profesor de Análisis Estructural de la misma universidad. (E-mail: ptheran@guayacan.uninorte.edu.co).

por compatibilidad de deformaciones de miembros monolíticos.

Torsión primaria

Llamada también «torsión de equilibrio» o «torsión estáticamente determinada». Se presenta cuando la carga externa no tiene más alternativa que ser resistida por torsión. Un caso típico es la losa en voladizo de la figura 1. Las cargas soportadas por la losa producen momentos torsionales M_t que actúan a lo largo de la longitud de la viga de apoyo; éstos se equilibran mediante el momento torsor resistente T que se desarrolla en las columnas. Sin estos momentos de torsión, la estructura entraría en colapso. En este caso, la viga se debe diseñar para resistir el momento torsionante externo total. Debido a la losa en voladizo, no existe redistribución de la torsión.

Torsión secundaria

Se denomina también «torsión por compatibilidad» o «torsión estáticamente indeterminada». Se presenta a partir de las exigencias de continuidad, es decir, de la compatibilidad de deformaciones entre elementos adyacentes de una estructura (ver figura 2). En este caso, los momentos torsionales no pueden determinarse únicamente con base en el equilibrio estático. En el evento de no considerar la continuidad en el diseño, a menudo se presentará un agrietamiento excesivo, pero no se llegará a la falla de la estructura.

Cuando las viguetas o losas macizas son monolíticas con las vigas extremas o terminales de un panel, presentan momentos flectores. Debido a la continuidad con la viga y la rigidez que estas vigas tienen al giro se produce torsión.

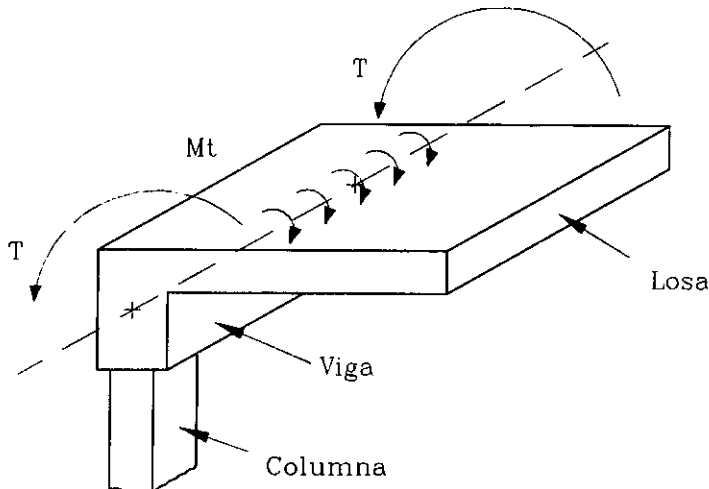


Figura 1. Torsión primaria o de equilibrio en una losa en voladizo

Si la viga de borde tiene suficiente rigidez a la torsión y está reforzada adecuadamente y si los apoyos pueden desarrollar el momento torsor resistente T , entonces los momentos en la losa serían aproximadamente los de un apoyo exterior rígido. Sin embargo, si la viga tiene una rigidez baja a la torsión y está reforzada deficientemente por efectos torsionales, se presentará agrietamiento, que reducirá aún más la rigidez torsional.

Normalmente no se tienen en cuenta los efectos torsionales secundarios en el diseño cuando los esfuerzos torsionales son bajos y cuando los estados alternos de equilibrio son posibles. Otras veces no se contemplan en el diseño porque el diseñador no sabe determinarlos. Por fortuna, en este caso generalmente existe la posibilidad de una redistribución

interna de esfuerzos que encuentran un equilibrio.

Análisis de Torsión

Por más de sesenta años, el análisis de torsión de miembros de concreto se ha basado en:

- a) La *teoría clásica de la elasticidad*, desarrollada a través de fórmulas matemáticas en conjunto con la analogía de la membrana (de Saint Venant). O bien
- b) En la *teoría de la plasticidad*, representada por la analogía del montón de arena (de NADAI).

Ambas teorías se aplicaron principalmente al estado de torsión pura. Sin embargo, se encontró en forma experi-

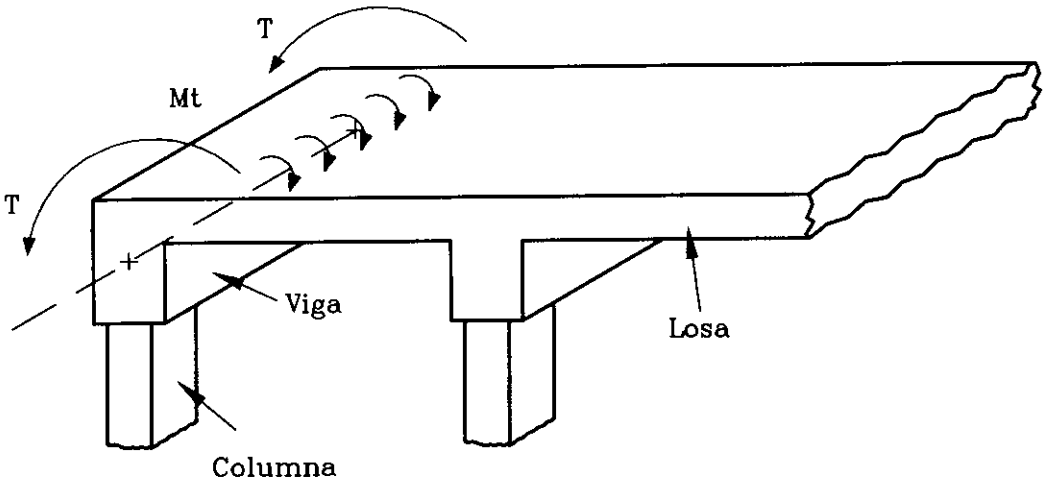


Figura 2. Torsión secundaria o de compatibilidad en una viga de borde

mental que la teoría plástica no es del todo satisfactoria para la correcta determinación del estado de esfuerzos en el concreto sujeto a torsión pura. No obstante, en la aproximación plástica es donde el comportamiento del concreto se encontró mejor representado. Por eso, casi todos los desarrollos en torsión para concreto simple y reforzado han tomado este camino.

Estas teorías pueden ser estudiadas en las literaturas especializadas sobre el tema.

2. METODOS DE DISEÑO PARA TORSIÓN

Normalmente, la torsión va acompañada por flexión y cortante. La capacidad del concreto simple para resistir torsión cuando se presenta en combinación con otras cargas puede, en varios casos, ser menor que cuando resiste únicamente los mismos momentos torsionales externos. Así, se deberá proporcionar refuerzo por torsión.

La inclusión del refuerzo longitudinal y transversal para resistir parte de los momentos torsionales introduce un nuevo elemento en el conjunto de fuerzas y momentos en la sección.

Si:

T_n = Resistencia nominal total a la torsión requerida de la sección incluyendo el refuerzo.

T_c = Resistencia nominal a la torsión del

concreto simple.

T_s = Resistencia a la torsión del refuerzo.

De donde:

$$T_n = T_c + T_s$$

o bien:

$$T_s = T_n - T_c$$

A fin de estudiar la contribución de las varillas longitudinales y transversales para poder evaluar T_s , se deberá analizar el sistema de fuerzas que actúan en las secciones transversales alabeadas del elemento estructural en el estado límite de falla.

En la actualidad se aceptan básicamente dos teorías:

a) *Teoría de la flexión asimétrica*, la cual se basa en la aproximación de la distribución plana de deformaciones de las secciones transversales sujetas a flexión y torsión.

Fue desarrollada por Lessig, con contribuciones posteriores de Collins, Zia, Gesund, Mattock y Elfgren, pero fue T. Hsu quien hizo la mayor contribución experimental en el desarrollo de la teoría de la flexión asimétrica. Esta teoría sentó las bases para el diseño a torsión de las normas del ACI 318-71 hasta el ACI 318-89 y del Código Colombiano de Construcciones Sismo-Resistentes.

Por tratarse de una teoría amplia-

mente conocida por los ingenieros diseñadores, no se tratará aquí.

b) La segunda teoría está basada en el *modelo del tubo de paredes delgadas/cercha espacial plástica*, similar al de la analogía de cercha plástica utilizada para el diseño de cortante.

Esta teoría, presentada por Lampert, Lampert y Thurlimann, y Lampert y Collins, sentó las bases para los requisitos de diseño a torsión del Código Canadiense, del Comité Euro-Internacional du Béton, del reglamento ACI 318-95 y de la Norma Colombiana NSR-98.

3. MÉTODO DEL TUBO DE PARED DELGADA/CERCHA ESPACIAL PLÁSTICA

Este método es el adoptado por el reglamento ACI 318-95 y por las Normas Colombianas de Diseño y Construcción Sismo-Resistente y otros códigos más. El cambio es propuesto principalmente porque este método de diseño es considerablemente más sencillo de entender y aplicar y es igual de preciso.

El nuevo método también puede ser usado para concreto pre-esforzado, tema no tratado por el ACI 318-89.

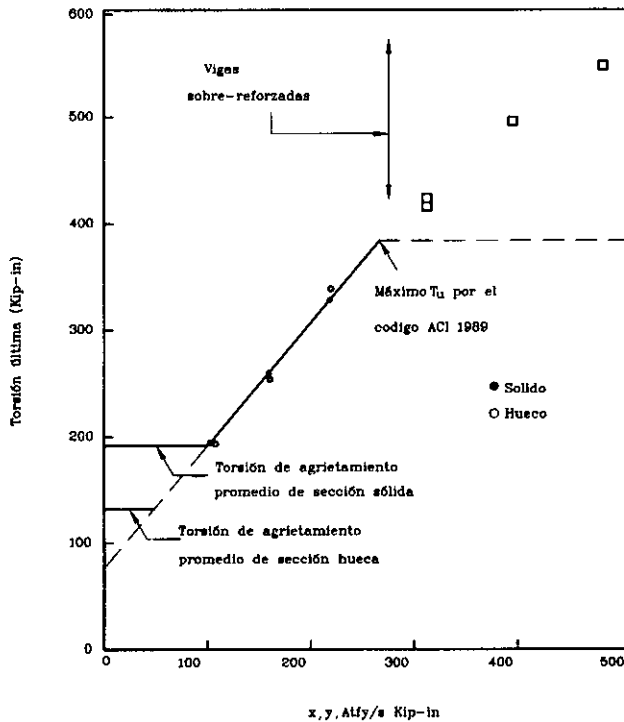


Figura 3. Comparación de la resistencia torsional de secciones sólidas y huecas (de la ref. 3)

Existen varios procedimientos de diseño a torsión que son «precisos» pero más complejos de entender y aplicar.

3.1. Teoría básica

Tanto las secciones sólidas como huecas son consideradas como tubos. Los datos de pruebas representados en la figura 3 sugieren que una vez ocurre el agrietamiento, el concreto en el centro del miembro tiene poco efecto en el comportamiento torsional de la sección transversal, y puede ser ignorado.

Esta observación es la base de los procedimientos de diseño para torsión que seguiremos más adelante.

Después del agrietamiento, el tubo es idealizado como una cercha espacial constituido de estribos cerrados, barras longitudinales en las esquinas y diagonales de compresión de concreto centradas en los estribos. Las diagonales son idealizadas como las existentes entre grietas, las cuales están en un ángulo θ . Generalmente se toma como 45° para vigas de concreto reforzado, como se muestra en la figura 4(a).

3.2. Esfuerzos cortantes en tubos de pared delgada

En los textos de mecánicas de materiales se encuentran las teorías sobre esfuerzos de cortante, τ , para miembros huecos de

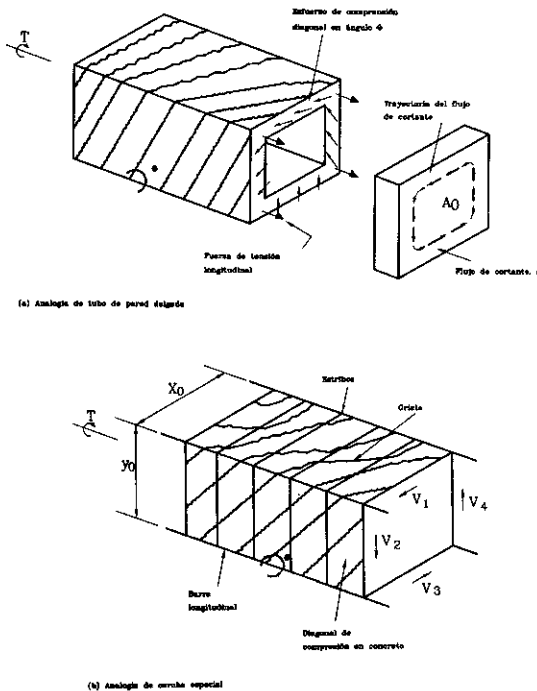


Figura 4. Tubo de pared delgada/cercha especial (de la ref. 6)

pared delgada debido a la torsión, y cuya expresión es la siguiente:

$$\tau = \frac{T}{2} \frac{1}{A_o t}$$

Donde T es la torsión; A_o es el área encerrada por una línea alrededor del tubo en el espesor medio de la pared; t es el espesor de la pared del tubo.

Para secciones transversales sólidas es necesario definir el espesor de la pared del tubo equivalente de pared delgada. Antes del agrietamiento, el espesor de la pared es definido como una función del área y del perímetro de la sección de concreto que no está agrietada. Después del agrietamiento, la resistencia a la torsión viene de los estribos, de las barras longitudinales y de la piel del concreto. A_o es empíricamente tomado como 0.85 veces del área A_{oh} , y t es tomado como A_{oh}/p_{hv} que es el períme-

tro de la línea central de los estribos cerrados.

3.3. Derivaciones de las ecuaciones de diseño a torsión

Las grietas debido a la torsión son inclinadas y tienden a extenderse alrededor del elemento en forma de espiral (ver la figura 5). Después del agrietamiento, una viga rectangular sujeta a torsión pura puede ser idealizada como se muestra en la figura 4(b). La viga es moderada como una cercha espacial conformada por barras longitudinales en las esquinas, estribos cerrados y diagonales de compresión de concreto, las cuales van en espiral alrededor del miembro, entre las grietas torsionales. El ancho y el alto de la cercha, X_o y Y_o , respectivamente, medidos centro a centro de los lados de los estribos cerrados. El ángulo de la grieta es θ , el cual inicialmente es cerca de 45° para vigas de concreto reforzado.

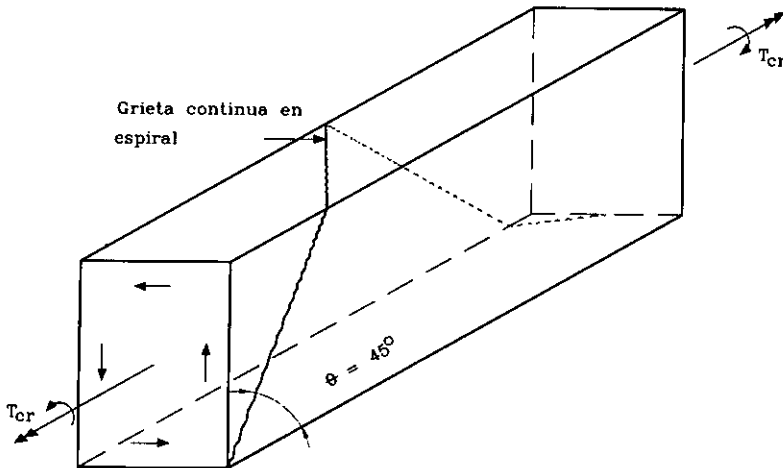


Figura 5. Grieta en espiral producida por la torsión de agrietamiento T_{cr} .

3.3.1. Area de estribos

La fuerza cortante por unidad de longitud de perímetro, en cualquier punto en el perímetro del tubo, se refiere al flujo de cortante, q , que es dado por:

$$q = \tau = \frac{T}{2A_o} \quad (E-1)$$

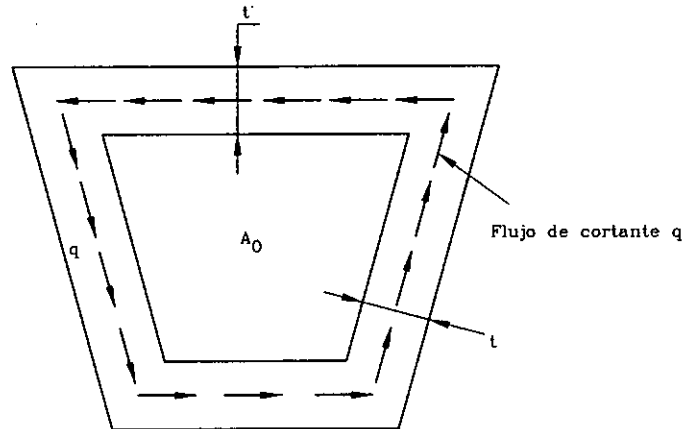


Figura 6. Flujo de cortante de magnitud constante

La fuerza total de cortante debido a la torsión a cada lado del elemento es q veces la longitud del lado. Así, en los lados superior e inferior el cortante es:

$$V_1 = V_3 = \frac{TX_o}{2A_o} \quad (E-2)$$

Similarmente, el cortante debido a torsión para cada uno de los lados verticales es:

$$V_2 = V_4 = \frac{TY_o}{2A_o} \quad (E-3)$$

Tomando momento con respecto a una esquina de la cercha, tenemos la torsión interna:

$$T = V_1 Y_o + V_2 X_o \quad (E-4)$$

Sustituyendo por V_1 y V_2 de las ecuaciones E-2 y E-3 tenemos:

$$T = \left(\frac{TX_o}{2A_o} \right) Y_o + \left(\frac{TY_o}{2A_o} \right) X_o \quad (E-5)$$

o

$$T = \frac{2T(X_o Y_o)}{2A_o} \quad (E-6)$$

Pero, por definición, $X_o Y_o = A_o$. Así se ha demostrado que las fuerzas internas V_1 y V_4 equilibran el momento aplicado, T .

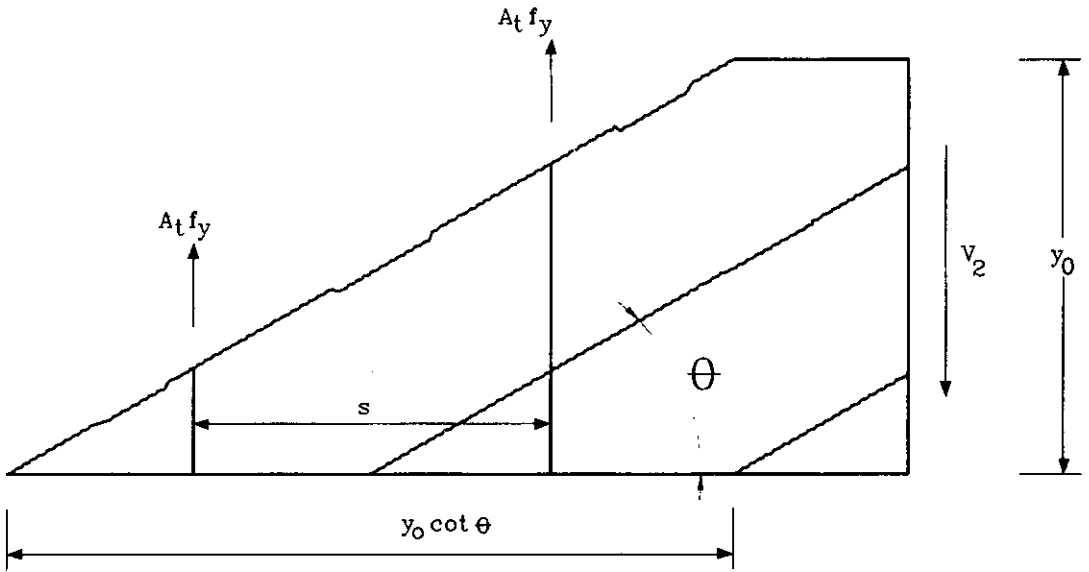


Figura 7. Fuerza en los estribos

Una parte de uno de los lados verticales se muestra en la figura 7. La grieta inclinada corta n estribos, donde:

$$n = \frac{Y_o \cot \theta}{S} \quad (E-7)$$

Donde S es el espaciamiento de los estribos. La fuerza en los estribos que pasa la grieta debe ser equilibrada por V_2 .

Asumiendo que todos los estribos llegan a la fluencia, tenemos:

$$V_2 = \frac{A_t f_{yv} Y_o \cot \theta}{S} \quad (E-8)$$

Donde θ puede tomarse entre 30° y 60° . Para concretos reforzados se sugiere que se tome igual a 45° .

f_{yv} es el esfuerzo de fluencia de los estribos. Reemplazando V_2 en la ecua-

ción E-3 y tomando T igual a la capacidad de momento torsional nominal, T_n , tenemos:

$$T_n = \frac{2A_o A_t f_{yv} \cot \theta}{S} \quad (E-9)$$

(NSR.C.11-28)

Después del agrietamiento, la resistencia torsional es producida por el tubo formado por las paredes de la cercha espacial.

La NSR-98 permite que el área A_o se tome como 0.85 de A_{oh} . Donde A_{oh} es el área definida por el centro del refuerzo transversal para torsión que se encuentra más afuera en la sección de concreto.

T. Hsu nos da unos valores más exactos de t y A_o como:

$$T = \frac{4T_n}{A_o f'_c} \quad (E-10)$$

$$A_o = A_{cp} = \left(\frac{2T_n P_{cp}}{A_{cp} f'_c} \right) \quad (E-11)$$

3.3.2. Refuerzo longitudinal

Como se muestra en la figura 8, la fuerza cortante V_2 puede ser resuelta dentro de la fuerza compresiva diagonal, D_2 , paralela a los puntales inclinados de compresión y una fuerza de tensión axial, N_2 . Donde D_2 y N_2 son dadas por:

$$D_2 = \frac{V_2}{\cos \theta} \quad (E-12)$$

$$N_2 = V_2 \cot \theta \quad (E-13)$$

tangular, como se muestra en la figura 4 (b), la fuerza longitudinal total es:

$$N = 2 (N_1 + N_2) \quad (E-14)$$

Sustituyendo las ecuaciones E-2, E-3 y E-13 y tomando T igual a T_n obtenemos:

$$N = \frac{T_n}{2A_o} 2(X_o + Y_o) \cot \theta \quad (E-15)$$

Donde $2(X_o + Y_o)$ es el perímetro del estribo cerrado, p_h . El refuerzo longitudinal debe ser provisto para la fuerza longitudinal N .

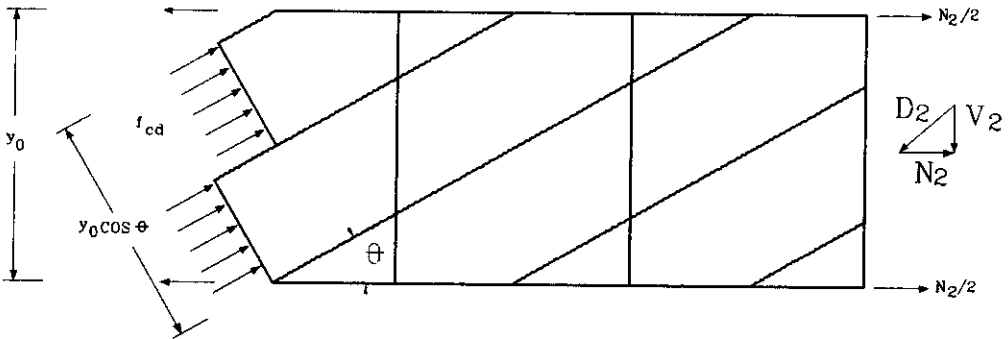


Figura 8. Lado de la cercha espacial

Debido a que el flujo de cortante, q , es constante a lo largo del lado del elemento en un tubo de pared delgada, D_2 y N_2 actúan en el centroide del lado. Para una viga con barras longitudinales en las esquinas arriba y abajo del lado 2, la mitad de N_2 será resistida por cada barra de esquina. Para un miembro rec-

Asumiendo que este refuerzo fluye, con un esfuerzo de fluencia f_{yl} tenemos:

$$A_l f_{yl} = N$$

o

$$A_l = \frac{T_n p_h}{2A_o f_{yl}} \cot \theta \quad (E-16)$$

Por conveniencia en el diseño, A_t puede ser expresado en términos del área de los estribos torsionales. Sustituyendo la ecuación E-9 en la ecuación E-16 tenemos:

$$A_t = \left(\frac{A_t}{S} \right) p_h \left(\frac{f_{yv}}{f_{yt}} \right) \cot^2 \theta \quad (\text{E-17})$$

(NSR C. 11-29)

Debido a que las fuerzas N_1, N_2, N_3 y N_4 actúan en el centroide de los lados, la fuerza total, N , actúa a lo largo del eje centroidal del elemento. Por esta razón, el refuerzo longitudinal torsional debe ser distribuido alrededor del perímetro de la sección transversal, de manera que el centroide de las áreas de las barras coincida aproximadamente con el centroide del miembro, en cada esquina del estribo cerrado se debe colocar una barra.

3.3.3. Cortante y torsión combinadas

En los códigos ACI anteriores a 1995, una parte tanto a cortante, V_c , como a torsión, T_c , eran tomados por el concreto y en gran medida las fórmulas eran complejas. En el nuevo método de diseño, V_c se asume que no es afectado por la presencia de la torsión, y T_c siempre es tomado igual a cero, o sea que toda la torsión es tomada por el refuerzo, T_s . Esto simplifica muchísimo los cálculos.

Comparaciones de diseño realizadas por el comité ACI 318 muestran que para V_u bajo y T_u alto con v_u menor que $0.80 (\phi 2\sqrt{f'_c})$ psi, el nuevo método re-

quiere más estribos que los requeridos por el Código ACI 318-89. Para v_u mayor que este valor, el nuevo método requiere marginalmente menos estribos que el ACI 318-89.

3.3.4. Máximo cortante y torsión

Un miembro cargado por torsión o por combinación cortante y torsión puede fallar por fluencia de los estribos y el refuerzo longitudinal o por el aplastamiento del concreto debido a las fuerzas diagonales de compresión D_2 , que se muestra en la figura 8. La limitación de los esfuerzos de cortante y torsión en el ACI 318-89 se derivaron originalmente para limitar los anchos de las grietas, y en el nuevo método también se conserva este propósito.

- *Límite del ancho de la grieta*

El esfuerzo cortante v debido al cortante directo es $V_u / b_w d$. De la ecuación $\tau = T / 2A_{ot}$ con A_o después del agrietamiento torsional tomado igual a $0.85 A_{oh}$ y $t = A_{oh} / p_h$, el esfuerzo, τ , debido a la torsión es $T_u p_h / (1.7 A_{oh}^2)$. En una viga cajón, éstos son directamente adicionados al lado A en la figura 9 y el límite es dado por:

$$v_u + \left[\frac{T_u p_h}{1.7 A_{oh}^2} \right] \leq \phi \left[v_c + \frac{2\sqrt{f'_c}}{3} \right] \quad (\text{E-18})$$

(NSR C.11-26)

Si el espesor de la pared varía alrededor del perímetro de la sección hueca, la ecuación E-18 debe evaluarse en los

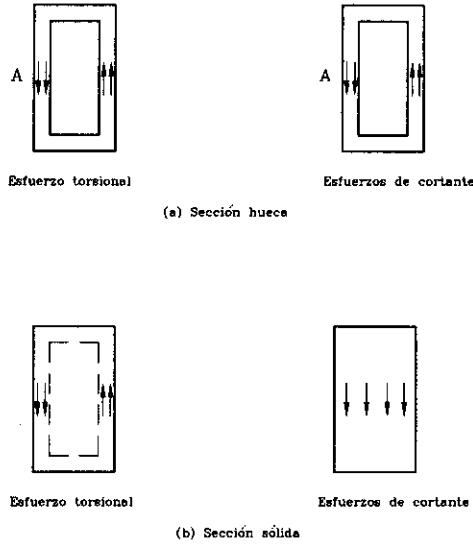


Figura 9. Esfuerzos de cortantes debido a la torsión y el cortante

puntos donde el término del lado izquierdo sea un máximo. Si en las secciones huecas, el espesor de la pared es menor que A_{oh} / p_h , el segundo término del lado izquierdo de la ecuación E-18 debe tomarse como $T_u / 1.7A_{oh} t$. Donde t es el espesor de las paredes de la sección hueca en la localización donde se están verificando los esfuerzos.

Para una sección sólida, los esfuerzos de cortante debido al cortante directo son asumidos para estar distribuidos uniformemente a través del ancho de la sección, mientras que los esfuerzos cortantes torsionales existen solamente en las paredes del tubo de pared delgada, como se muestra en la figura 9 (b). En este caso, la suma directa de los dos términos tiende a ser conservadora, y se usa la suma de raíz cuadrada:

$$\sqrt{V_u^2 + \left[\frac{T_u p_h}{1.7A_{oh}^2} \right]^2} \leq \phi \left[v_u + \frac{2\sqrt{f'_c}}{3} \right] \quad (E-19)$$

(NSR C. 11-25)

3.3.5. Límite de aplastamiento del alma

La falla también puede ocurrir debido al aplastamiento del concreto del alma a causa de las fuerzas de compresión en el puntal entre grietas. La fuerza de compresión diagonal en un lado vertical del elemento de la figura 8 es dado por la ecuación E-12. Esta fuerza actúa en un ancho $Y_o \cos \theta$, como se muestra en la figura 8. El esfuerzo de compresión que resulta es:

$$f_{cd} = \frac{V_2}{tY_o \cos \theta \sin \theta} \quad (E-20)$$

Sustituyendo la ecuación $\tau = T/2A_{ot}$, de nuevo tomando A_o igual a $0.85 A_{oh}$ y t aproximadamente como A_{oh}/p_h , tenemos f_{cd} debido a torsión:

$$f_{cd} = \frac{V_2}{1.7 A_{oh}^2 \text{Cos}\theta \text{ Sen}\theta} \quad (\text{E-21})$$

Los esfuerzos de compresión debido al cortante pueden ser calculados de forma similar:

$$f_{cd} = \frac{V_u}{b_w d \text{Cos}\theta \text{ Sen}\theta} \quad (\text{E-22})$$

Y para secciones sólidas:

$$f_{cd} = \sqrt{\left(\frac{V_u}{b_w d \text{Cos}\theta \text{ Sen}\theta}\right)^2 + \left(\frac{T_u p_h}{1.7 A_{oh}^2 \text{Cos}\theta}\right)^2} \quad (\text{E-23})$$

El valor de f_{cd} de la ecuación E-23 no debe exceder el esfuerzo de aplastamiento del concreto agrietado del alma, f_{ce} . Collins y Mitchell han relacionado f_{ce} a las deformaciones en el esfuerzo longitudinal y transversal, $\epsilon = 0.002$, igual al esfuerzo de fluencia del acero de 60000 psi. Estos investigadores predicen que $f_{ce} = 0.549 f'_c$ (psi). Estableciendo f_{cd} en la ecuación E-23 igual a $0.549 f'_c$ y evaluando $\text{cos}\theta \text{ sen}\theta$ para $\theta = 45^\circ$, el límite superior del cortante y la torsión establecida por medio del aplastamiento del concreto del alma se convierte en:

$$\sqrt{\left(\frac{V_u}{b_w d}\right)^2 + \left(\frac{T_u p_h}{1.7 A_{oh}^2}\right)^2} \leq \phi (0.275 f'_c) \quad (\text{E-24})$$

Dos simplificaciones se hicieron para la derivación de la ecuación E-24. Primero, el cálculo de f_{cd} en la ecuación E-22 involucra la profundidad efectiva, d , mientras el cálculo de f_{cd} en la ecuación E-20 utiliza la altura de la pared, Y_o , el cual es alrededor de $0.9 d$. Segundo, todo el cortante fue asumido para ser transportado por la acción de la cercha, sin el término V_c .

4. LÍMITE INFERIOR PARA EL CUAL LA TORSIÓN DEBE SER CONSIDERADA

No se requiere refuerzo por torsión si la grieta torsional no se presenta. En la torsión pura, el esfuerzo principal de tensión, σ_1 , es igual al esfuerzo de cortante, τ , en el punto dado. Así, de la ecuación $\tau = T / 2 A_{oh}$ tenemos:

$$\sigma_1 = \tau = \frac{T}{2 A_o t} \quad (\text{E-25})$$

Para aplicar esto a secciones sólidas es necesario definir el espesor de la pared del tubo equivalente antes del agrietamiento. El Código Canadiense asume que antes del agrietamiento, el espesor de la pared, t , es igual a $3 A_{cp} / 4 p_{cp}$, el área A_o , encerrada por la línea central de las paredes del tubo, se toma como $2 A_{cp} / 3$. Sustituyendo en la ecuación E-25 tenemos:

$$\sigma_1 = \tau = \frac{T p_{cp}}{A_{cp}^2} \quad (\text{E-26})$$

Se considera que el agrietamiento

torsional ocurre cuando el esfuerzo principal de tensión alcanza la resistencia de tensión del concreto en tensión-compresión biaxial, tomándolo como $4\sqrt{f'_c}$ (psi). Así, la torsión en el agrietamiento es:

$$T_{cr} = 4 \sqrt{f'_c} \left(\frac{A_{cp}^2}{p_{cp}} \right) \quad (E-27)$$

Se toma la resistencia a tensión como $4\sqrt{f'_c}$, en vez de $6\sqrt{f'_c}$, porque la acción de la compresión biaxial y tensión reducen la resistencia a tensión.

5. REFUERZO MÍNIMO A TORSIÓN

El esfuerzo mínimo de estribos cerrados para cortante y torsión exigido en este nuevo procedimiento es el mismo que el Código ACI318-89. Para torsión pura, esto es equivalente a:

$$A_{lmin} = \frac{25b_w S}{f_{yo}} \quad (E-28)$$

En ensayos realizados por T. Hsu en miembros de sección rectangular de concreto reforzado sujetos a torsión pura, dos vigas fallaron en la carga de agrietamiento torsional. En estas vigas, la relación total del volumen de los estribos y esfuerzo longitudinal al volumen del concreto fue de 0.802 y 0.88 por ciento, respectivamente. Una viga con relación volumétrica de 1.07 por ciento falló a las 1.08 veces la fuerza de torsión de agrietamiento. Todas las otras vigas tenían proporciones de refuerzo de 1.07 por ciento o mayor, y fallaron a fuerzas de torsión excedidas de 1.2 veces la fuerza

de torsión de agrietamiento. Esto sugiere que las vigas con resistencia de concreto y acero similares cargadas a torsión pura deberían tener una relación volumétrica mínima de refuerzo del orden de 0.90 a 1.00 por ciento. Por lo tanto,

$$\frac{A_{lmin} S}{A_{cp} S} + \frac{A_t p_h}{A_{cp} S} \geq 0.01 \quad (E-29)$$

o

$$A_{lmin} = 0.01 A_{cp} - \frac{A_t p_h}{S} \quad (E-30)$$

Si se asume que la constante 0.01 es una función de las resistencias de los materiales, la ecuación E-30 puede ser reescrita como:

$$A_{lmin} = \frac{7.5 \sqrt{f'_c}}{f_{yt}} A_{cp} - \frac{A_t p_h}{S} \left(\frac{f_{yv}}{f_{yt}} \right) \quad (E-31)$$

El ACI, desde el Código de 1971 y de años subsiguientes, suministró una transición entre el acero requerido por la ecuación A_{lmin} para torsión pura y el menor refuerzo mínimo requerido para vigas sujetas a cortante sin torsión. Esto se logró multiplicando el primer término del lado derecho de la ecuación E-30 $\tau / (\tau + v)$. Durante el proceso de balota del Comité para aprobar el nuevo procedimiento, los profesores Mattock y Hsu desarrollaron expresiones simplificadas que aproximaron $\tau / (\tau + v)$ como una función de τ solamente, y como una función de v solamente, respectivamente.

Hsu mostró que el rango práctico de comportamiento de vigas con A_l , satisfaciendo la ecuación E-17 podía ser representado tomando $\tau / (\tau + v)$ igual a $2/3$, lo cual dio la ecuación siguiente para el refuerzo longitudinal:

$$A_l = \frac{5\sqrt{f'_c} A_{cp}}{f_{yt}} - \left(\frac{A_l}{5}\right) p_h \left(\frac{f_{yo}}{f_{yt}}\right) \quad (\text{E-32})$$

Comparaciones con los resultados de las pruebas de vigas de concreto preesforzadas indican que la misma cantidad de refuerzo mínimo longitudinal es necesario en las vigas preesforzadas.

6. PROCEDIMIENTO DE DISEÑO SEGÚN LA NORMA NSR-98

A continuación se presenta un procedimiento para diseño a torsión basado en los requisitos de la Norma NSR-98.

- Obtenga las envolventes del cortante, de los momentos de flexión y torsión y sus respectivos diagramas para cada elemento.
- Seleccione b , d y h basándose en los momentos de flexión pero teniendo en cuenta el cortante y la torsión.
- Determine si la torsión debe ser considerada.

$$T_u < \frac{\phi\sqrt{f'_c} A^2_{cp}}{p_{cp}}$$

Los efectos de torsión pueden despreciarse si se cumplen con los requisitos C.11.6.1. de la Norma NSR-98.

- Verifique si la sección del elemento es adecuada.

Las dimensiones de la sección deben ser tales que cumplan las siguientes relaciones:

d-1) Para secciones sólidas:

$$\sqrt{(v_u)^2 + \left[\frac{T_u p_h}{1.7 A_{oh}^2}\right]^2} \leq \phi \left[v_c + \frac{2}{3} \sqrt{f'_c} \right] \quad (\text{C.11-25})$$

d-2) Para secciones huecas:

$$v_u + \left[\frac{T_u p_h}{1.7 A_{oh}^2}\right] \leq \phi \left[v_c + \frac{2}{3} \sqrt{f'_c} \right] \quad (\text{C.11-26})$$

- Calcule el refuerzo requerido por flexión y el área de refuerzo requerido por cortante. El área del refuerzo por cortante debe expresarse en términos de A_v/s (área de acero de estribo por unidad de longitud) para ser combinado con el área del refuerzo de estribos requerido por torsión.

$$\frac{A_v}{s} = \frac{v_{us} b_w}{\phi f_{yv}}$$

No está de más recordar que en este paso se deben verificar los requisitos de la Norma para diseño a cortante.

- Determine el área de acero para estribos requerido por torsión en términos de A_t/s .

$$\frac{A_t}{S} = \frac{T_u}{2\theta A_o f_{yv} \cot \theta}$$

Donde A_o debe determinarse por análisis y θ no debe tomarse menor de 30° ni mayor de 60° , se permite usar $\theta = 45^\circ$ para elemento de concreto reforzado, $f_{yv} \leq 420$ MPa y $A_o = 0.85 A_{oh}$.

g) Combine el área de acero requerida para cortante y torsión y escoja su diámetro. Expresé A_t/s en términos de A_v/s . Para un estribo con dos ramas tenemos:

$$\frac{A_v}{S} (Total) = \left(\frac{A_v}{S} \right) + \left(\frac{2A_t}{S} \right)$$

El espaciamiento del refuerzo transversal por torsión no debe exceder el mayor de $p_h/8$, ni 300 mm.

h) Chequee el área de acero mínimo de estribos cerrados:

$$\frac{A_v}{S} = \frac{2A_t}{S} \geq \frac{b_w}{3f_{yv}}$$

i. Calcule el área del refuerzo longitudinal por torsión:

$$A_t = \frac{A_t}{S} p_h \left(\frac{f_{yv}}{f_{yt}} \right) \cot^2 \theta$$

Donde θ debe tener el mismo valor utilizado en el paso (f) y A_t/s el valor calculado en el paso (f).

El área mínima total de refuerzo lon-

gitudinal será:

$$A_{lmin} = \frac{5\sqrt{f'_c} A_g}{12f_{yt}} + \left(\frac{A_t}{S} \right) p_h \frac{f_{yv}}{f_{yt}}$$

Donde A_{lmin} no puede ser menor que cero, a A_t/s debe corresponder a la cantidad por medio de la ecuación C.11-28 de la Norma NSR-98, pero no menos que $(1/6) b_w/f_y$.

El refuerzo longitudinal por torsión debe distribuirse uniformemente alrededor del perímetro de la sección transversal.

j) Este paso es opcional. El diseñador puede reducir el área de refuerzo longitudinal para torsión en la zona de compresión por flexión en una cantidad equivalente a $M_u/(0.9 f_{yt})$. Para mayor claridad, ver C.11.6.3.9.

k) Combine el refuerzo longitudinal por torsión y flexión y seleccione el diámetro de las barras.

l) Haga el despiece del refuerzo (ver el capítulo C. 12).

7. CONSIDERACIONES PARA EL DISEÑO A TORSIÓN SEGÚN LA NORMA NSR-98

El diseño se debe hacer contemplando los efectos de flexión, cortante, torsión, carga axial y los demás esfuerzos que se presenten en un miembro y que puedan afectar sus estados límites.

Las ecuaciones básicas de diseño son:

$$\begin{aligned}\phi V_n &\geq V_U \\ \phi M_n &\geq M_U \\ \phi T_n &\geq T_U \\ \phi P_n &\geq P_U\end{aligned}$$

a) **Selección de la sección transversal**

La selección de la sección transversal de un elemento debe hacerse pensando en factores económicos, constructivos, estéticos, funcionales y de resistencia.

b) **Sección crítica para el diseño a torsión**

Las secciones de elementos no preesforzados localizadas a una distancia menor que la de la cara del apoyo, pueden diseñarse para la torsión T_u calculada a una distancia d . Si existe un torque concentrado dentro de esta distancia, la sección crítica para diseño a torsión debe ser la de la cara del apoyo.

Las secciones críticas para el diseño a cortante según C. 11 .1 .3.

c) **Definición de A_{cp} y p_{cp}**

A_{cp} es el área limitada por el perímetro exterior de la sección de concreto; incluye el área de los huecos para una sección con huecos.

p_{cp} es el perímetro exterior de la sección de concreto A_{cp} .

En el capítulo C. 11 de la Norma NSR-98 se presentan los requisitos para determinar A_{cp} y p_{cp} .

d) **Definición de A_{oh}**

A_{oh} es el área definida por el centro del refuerzo transversal para torsión que se encuentra más afuera en la sección de concreto.

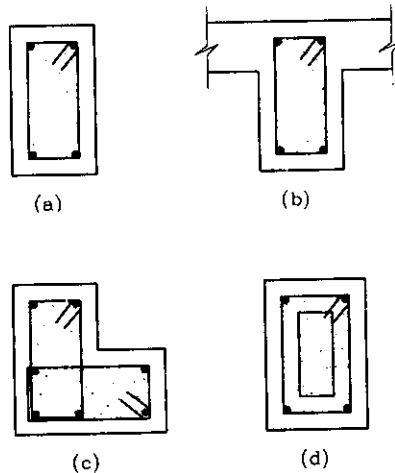


Figura 10. Ejemplos para obtener A_{oh}

A_o es el área bruta definida por la trayectoria del flujo de cortante.

e) Recomendaciones para el refuerzo

El refuerzo para torsión debe consistir en refuerzo longitudinal en barras o tendones; los estribos deben ser cerrados, colocados perpendicularmente al eje del elemento o una caja cerrada de malla electrosoldada con los alambres transversales perpendiculares al eje del elemento, o en vigas no preesforzadas, refuerzo en espiral.

El refuerzo transversal debe anclarse utilizando un gancho de 135° alrededor del refuerzo longitudinal, o en las regiones donde el concreto que rodea el anclaje está restringido contra el descascamiento por medio de una ala de la sección o una losa, siguiendo los requisitos de C.12.13.2.1, C.12.13.2.2. o C.12.13.2.3.

El refuerzo longitudinal para torsión debe desarrollar adecuadamente su resistencia a tracción en sus dos extremos.

En las secciones huecas sometidas a torsión, la distancia medida desde el centro del refuerzo transversal hasta la cara interna de la pared no debe ser menor que $0.5A_{oh}/p_h$.

f) Refuerzo mínimo para torsión

Donde se requiera esfuerzo para torsión, el área mínima de estribos cerrados debe calcularse por medio de la siguiente ecuación:

$$A_v + 2A_t \geq \frac{b_w S}{3 f_{yv}} \quad (C.11-30)$$

El área mínima total de refuerzo longitudinal para torsión debe calcularse por medio de la siguiente ecuación:

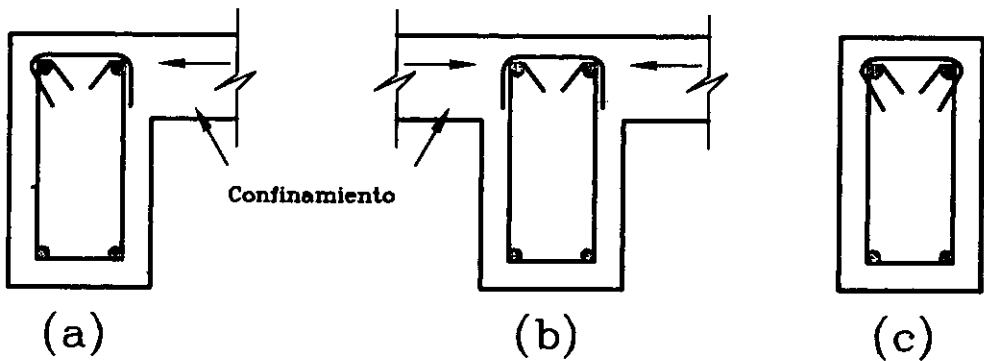


Figura 11. Anclajes recomendados de los estribos cerrados

- a) Loseta de confinamiento a un lado
- b) Loseta de confinamiento a ambos lados
- c) Viga aislada

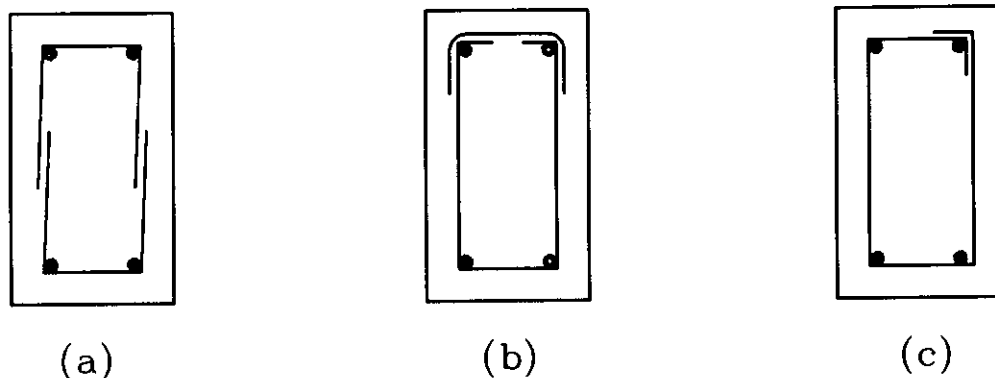


Figura 12. Anclajes de los estribos no recomendados

$$A_{lmin} = \frac{5 f'c A_g}{12 f_{yt}} - \left(\frac{A_t}{S} \right) p_h \frac{f_{yv}}{f_{yt}} \quad (C.11-31)$$

Donde A_{lmin} no puede ser menor que cero y A_t/s debe corresponder a la cantidad calculada por medio de la ecuación C. 11-28, pero no menos que $(1/6) b_w / f_{yv}$.

g) Espaciamiento del refuerzo para torsión

El espaciamiento del refuerzo transversal para torsión no debe exceder el mayor de $p_h / 8$, ni 300 mm.

El refuerzo longitudinal requerido para torsión debe distribuirse alrededor del perímetro de los estribos cerrados, con una máxima separación entre barras de 300 mm. Las barras longitudinales, o tendones de preesfuerzo, deben colocarse por dentro de los estribos. Debe

haber al menos una barra longitudinal o tendón en cada esquina del estribo. Las barras deben tener un diámetro por lo menos igual a $1/24$ del espaciamiento entre estribos, pero no pueden ser menores de barra N° 3 o 10 mm.

El refuerzo de torsión, tanto longitudinal como transversal, debe llevarse por una distancia mayor o igual a $(b_t + d)$ más allá del punto donde ya no se necesite teóricamente. b_t es el ancho de aquella parte de la sección transversal del elemento que contiene los estribos cerrados que resisten la torsión.

Bibliografía

1. AIS, *Normas Colombianas de Diseño y Construcción Sismo-Resistente*, 1998.
2. ACI Committee 318, *Building Code Requirement for Structural Concrete (ACI 318-95) and Commentary (ACI 318R-95)*. American Concrete Institute, 1995.
3. HSU T.C. Thomas. *Torsion of Structural Concrete-Behavior of Reinforced Concrete Rectangular Members, Torsion of Structural Concrete*.

ACI Publication SP-18, American Concrete Institute, 1968.

4. LEET Kenneth y BERNAL, Dionisio. *Reinforced Concrete Design*. 3ª ed. McGraw-Hill International Editions, 1997.

5. MCGREGOR G., James. *Reinforced Concrete Mechanics and Design*. 3ª ed. Prentice-Hall, 1998.

6. MCGREGOR G., James y GHONEIM G. «Mashour Design for Torsion». *ACI Structural Journal*, vol. 92, marzo-abril, 1995.

7. NAWY G. Edward. *Reinforced Concrete a Fundamental Approach*. 3ª ed. Prentice Hall, 1996.

8. NILSON, H. Arthur *Design of Concrete Structures*. McGraw-Hill, 1997.

ANEXO

Ejemplo

Diseñar la viga considerando la torsión

DATOS

CONCRETO : $F'c = 21 \text{ MPa}$

ACERO : $F_y = 420 \text{ MPa}$

Se tiene un muro, a lo largo de la viga cuya carga es de 4.00 kN/m aplicada en el eje de la viga.

Solución

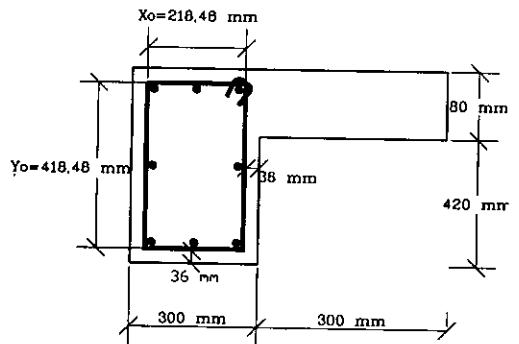
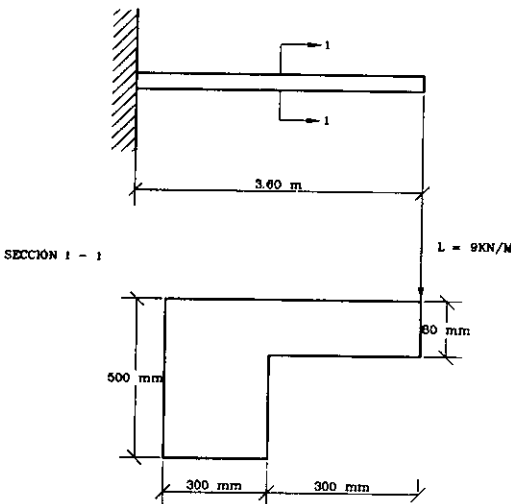
1. *Determinación de las dimensiones de la viga y sus propiedades*

$$h_{\text{mínimo}} = \frac{L}{8} = \frac{3.60}{8} = 450 \text{ mm}$$

Tomar $h = 500 \text{ mm}$

Probaremos con $b = 300 \text{ mm}$

Tomaremos un recubrimiento libre al estribo de 36 mm .



$$X_o = 300 - 36 \times 2 - 9.52 = 218.48 \text{ mm.}$$

$$Y_o = 500 - 36 \times 2 - 9.52 = 418.48 \text{ mm.}$$

$$A_{oh} = X_o Y_o = 218.48 \times 418.48 = 91,429.51 \text{ mm}^2$$

$$A_o = 0.85 A_{oh} = 0.85 \times 91,429.51 = 77,715.08 \text{ mm}^2$$

$$A_{cp} = 300 \times 500 = 150,000 \text{ mm}^2$$

$$p_{cp} = 2(300 + 500) = 1600 \text{ mm}$$

$$p_h = 2(X_o + Y_o) = 2(418.48 + 218.48) = 1273.92 \text{ mm}$$

$$d = 500 - 36 - 9.52 - 25.40/2 = 441.78 \text{ mm}$$

$$b_w = 300 \text{ mm}$$

Suponemos que tendremos estribos de $3/8 \leq (\phi = 9.52 \text{ mm})$ y varillas longitudinales de $1'' (\phi = 25.40 \text{ mm})$.

2. Evaluación de las cargas y diagramas de momento, cortante y torsión

CARGA MUERTA:

- Viga	=	$0.30 \times 0.50 \times 24$	=	3.60 kN/m
- Loseta	=	$0.08 \times 0.30 \times 24$	=	0.58 kN/m
- Muro	=		=	4.00 kN/m
				—————
				$D = 8.18 \text{ kN/m}$

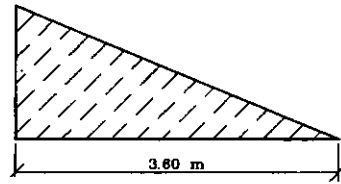
CARGA VIVA:

$$L = 9.00 \text{ kN/m}$$

$$W_u = 1.4 \times 8.18 + 1.7 \times 9 = 26.75 \text{ kN/m}$$

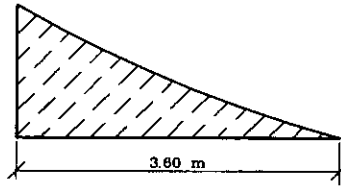
a) Diagrama de Cortante

$$V_u = 96.30 \text{ KN}$$



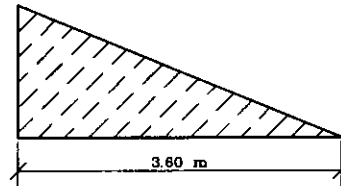
b) Diagrama de Momento Flector

$$M_u = 173.34 \text{ KN - m}$$



c) Diagrama de Momento Torsor

$$T_u = 25.66 \text{ KN - m}$$



- Cortante: $V_u = 26.75 \times 3.60 = 96.30 \text{ kN}$
- Momento Flector:
 $M_u = 26.75 \times 3.60/2 = 173.34 \text{ kN-m}$
- Momento Torsor:
 $T_u = (1.7 \times 9 \times 0.45 + 1.4 \times 0.58 \times 0.30) \times 3.60$
 $T_u = 25.66 \text{ kN-m}$

3. Diseño a Flexión

$$M_u = 137070 \text{ kN-mm}$$

$$K = 137070 / 300 \times (441.78)^2 = 0.00234$$

$$P = 0.0068 \rightarrow A_s = 0.0068 \times 300 \times 441.78 = 901.23 \text{ mm}^2$$

4. Determinar si la torsión puede ser ignorada

$$T_u = \frac{\phi \sqrt{f'_c} A_c^2}{12 P_p} = 0.85 \frac{\sqrt{21} (150000)^2}{12 \cdot 1600} = 4.56 E6 N \cdot mm$$

$$T_u = 25.66 \text{ kN} \cdot m > 4.56 \text{ kN} \cdot m$$

Por lo tanto, la torsión debe ser considerada.

5. Chequear si la sección es adecuada

$$(v_u)^2 + \left[\frac{T_u P_h}{1.7 A_{oh}^2} \right]^2 \leq \phi \left[v_c + \frac{2}{3} \sqrt{f'_c} \right]$$

$$\sqrt{\left(\frac{96300}{300 \times 441.78} \right)^2 + \left[\frac{25660000 \times 1273.92}{1.7 (914295.51)^2} \right]^2} = 2.41 \frac{N}{mm^2}$$

$$v_c = \frac{\sqrt{f'_c}}{6} = \frac{\sqrt{21}}{6} = 0.76 \text{ MPa}$$

$$\phi \left[v_c + \frac{2}{3} \sqrt{f'_c} \right] = 0.85 \left[0.76 + \frac{2}{3} \sqrt{21} \right] = 3.24 \text{ MPa}$$

$$2.41 \text{ MPa} < 3.24 \text{ MPa}$$

Luego la sección es adecuada

6. Estribos requeridos por cortante

$$v_{uc} = \frac{\phi \sqrt{f'_c}}{6} = \frac{0.85 \sqrt{21}}{6} = 0.65 \text{ MPa}$$

$$v_u = \frac{96700}{700 \times 441.78} = 0.73 \text{ N/mm}^2$$

$$v_u = 0.73 \text{ MPa} > v_{uc} = 0.65 \text{ MPa}$$

$$v_{us} = 0.73 - 0.65 = 0.08 \text{ MPa} < \frac{2\phi}{3} \sqrt{f'_c}$$

$$A_v/S = \frac{0.08 \times 300}{0.85 \times 420} = 0.0672 \text{ mm}^2/\text{mm}$$

NOTA: Para dos ramas.

7. Estribos requeridos por torsión

$$\frac{A_t}{S} = \frac{T_u}{2\phi A_o f_{yp} \cot \theta} \therefore \theta = 45^\circ$$

$$A_t/S = \frac{25.66 E6}{2 \times 0.85 \times 77715.08 \times 420 \times 1.0} = 0.463 \text{ mm}^2/\text{mm}$$

NOTA: Para una rama.

$$2 A_t/s = 2 \times 0.463 = 0.926 \text{ mm}^2/\text{mm}$$

8. Combinación del refuerzo por cortante y torsión

$$A_v/s + 2A_t/s = 0.0672 + 0.926 = 0.9932 \text{ mm}^2/\text{mm}$$

$$\text{Para barras No. 3 } A_s = 71 \text{ mm}^2$$

$$s = 71 \times 2 / 0.9932 = 142.97 \text{ mm}$$

Tomar s = 140 mm (14 cm)

9. El espaciamiento no puede exceder de 300 mm o $p_h/8 = 1273.92/8 = 159.24$ mm, por lo que el espaciamiento es satisfactorio

Se coloca este espaciamiento a todo lo largo de la viga, pero se puede hacer una economía calculando un nuevo espaciamiento. El refuerzo longitudinal debe extenderse a una distancia $d + b_t = 394 + 254 = 648$ mm. Más allá donde el refuerzo para torsión sea requerido.

10. Verificar que el área de los estribos cumpla con los requisitos de la Norma NSR-98

$$\frac{A_v}{S} + \frac{2A_t}{S} \geq \frac{b_w}{3f_{yv}} = \frac{300}{3 \times 420} = 0.238 \frac{\text{mm}^2}{\text{mm}}$$

$$0.9932 \text{ mm}^2/\text{mm} > 0.238 \text{ mm}^2/\text{mm}$$

11. Área de acero longitudinal requerido por torsión

$$A_t = \left(\frac{A_t}{S} \right) p_h \frac{f_{yv}}{f_{yt}} \cot \theta$$

$$A_t = 0.463 \times 1273.92 = 589 \text{ mm}^2$$

Chequeo del área A_t mínimo:

$$A_{tmin} = \frac{5\sqrt{f_c}A_g}{12f_{yt}} - \left[\frac{A_t}{S} \right] p_h \frac{f_{yv}}{f_{yt}}$$

$$= \frac{2\sqrt{21} \times 150000}{12 \times 4200} - (0.463) \times 1273.92$$

$$A_{tmin} = 92.11 \text{ mm}^2$$

$$A_t = 589.83 \text{ mm}^2 > A_{tmin} = 92.11 \text{ mm}^2$$

Pero A_t/s no puede ser menor que $\frac{b_w}{6f_{yv}}$

$$A_t/s = 0.463 \text{ mm}^2 > \frac{b_w}{6f_{yv}} = \frac{300}{6 \times 240} = 0.119 \text{ mm}^2$$

El máximo espaciamiento entre las barras del refuerzo longitudinal es de 300 mm. Se divide entre tres áreas iguales, para ser localizadas en la parte superior, abajo y en la mitad de la altura de la sección de la viga.

$$A_s = \frac{A_t}{3} = 589.83/3 = 196.61 \text{ mm}^2/\text{mm}$$

El diámetro mínimo del refuerzo longitudinal no debe ser menor que $1/24$ del espaciamiento entre estribos:

$$d_b = s / 24 = 140 / 24 = 5.83 \text{ mm}^2$$

pero no menos que $\phi 3/8$

Usar dos barras $\phi 1/2''$ en la mitad y en la parte inferior de la viga.

Combinar el refuerzo torsional con el de flexión:

$$A_s \text{ Flexión} = 901.23 \text{ mm}^2$$

$$A_s \text{ Torsión} = 196.61 \text{ mm}^2$$

$$A_s = 901.23 + 196.61 = 1097.84 \text{ mm}^2$$

Usar: $3 \phi 7/8$

12. Detalles de la viga

DETALLES DE LA VIGA

