Cuadrado de un trinomio como suma de cuadrados

Rafael E. Martínez Solano*

Resumen

En este artículo se determinan las condiciones bajo las cuales el cuadrado de un trinomio de la forma $x^2 + mxy + ny^2$, *con* m *y* n *naturales, puede ser expresado como una suma de cuadrados; qué forma tienen dichos sumandos y cómo aplicar los resultados obtenidos en la determinación de ternas pitagóricas.*

Palabras claves: Trinomio, suma de cuadrados, ternas pitagóricas.

Fecha de recepción: Septiembre 1 de 1999

Abstract

In this paper, the conditions under the square of a trinomial in x2 + mxy + ny2 form, *where* m *and* n *natural numbers, can be expressed as a sum of squares are determined. Form of these addends and how to apply obtained results in the construction of pythagorean terns.*

Key words: Trinomial, sum of squares, pythagorean terns.

1. Introducción

Una terna pitagórica es un conjunto ordenado de tres números naturales a, b, y c tal que

$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad (1.1)$$

La generación de ternas pitagóricas es un problema que ha ocupado a los matemáticos desde la antigüedad. Euclides propuso la siguiente fórmula para determinar ternas pitagóricas: Dados m y n números naturales, con $m>n$, la terna

$$(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2), \qquad (1.2)$$

es pitagórica. Veamos cómo al expresar el cuadrado de un trinomio de la forma $x^2 + mxy + ny^2$, para ciertos valores de m y n, como una suma de cuadrados, puede obtenerse una manera poco común de generar ternas pitagóricas.

* Area de Ciencias Básicas, profesor del Departamento de Matemática, Física y Estadística, Universidad del Norte. *(E-mail: rmartine@uninorte.edu.co).*

2. Desarrollo de la expresión $(x^2 + mxy + ny^2)^2$

Desarrollando el cuadrado del trinomio $x^2 + mxy + ny^2$, se tiene que:

$$\begin{aligned}(x^2 + mxy + ny^2)^2 &= (x^2 + mxy)^2 + 2\,(x^2 + mxy)\,ny^2 + n^2y^4 \\ &= \{x(x + my)\}^2 + 2nx^2y^2 + 2mnxy^3 + n^2y^4 \\ &= \{x(x + my)\}^2 + ny^2\,(2x^2 + 2mxy + ny^2)\end{aligned}$$

Luego

$$(x^2 + mxy + ny^2)^2 = \{x(x + my)\}^2 + ny^2\,(2x^2 + 2mxy + ny^2) \qquad (1.3)$$

Aquí, el primer sumando es un cuadrado perfecto independiente del valor de n.

Veamos ahora qué condiciones imponer a m y n para que el segundo sumando sea también un cuadrado perfecto.

Consideremos la ecuación $ny^2(2x^2 + 2mxy + ny^2) = 0$, la cual puede expresarse como $y^2(2nx^2 + 2nmxy + (ny)^2) = 0$. Si $y \neq 0$ y $n \neq 0$, entonces $2nx^2 + 2nmxy + (ny)^2 = 0$,

de modo que al despejar x se tiene:

$$x = \frac{-2mny \pm \sqrt{4m^2n^2y^2 - 8n^3y^2}}{4n}$$

Ahora, el trinomio $2nx^2 + 2nmxy + (ny)^2$ será cuadrado perfecto si la ecuación $2nx^2 + 2nmxy + (ny)^2 = 0$ tiene una raíz de multiplicidad 2, lo cual ocurre cuando $4m^2n^2y^2 - 8n^3y^2 = 0$.

Ahora,

$$4m^2n^2y^2 - 8n^3y^2 = 0 \Rightarrow 4n^2y^2(m^2 - 2n) = 0.$$

Pero

$$\begin{aligned}4n^2y^2 \neq 0 \quad &\Rightarrow m^2 - 2n = 0 \\ &\Rightarrow \mathrm{m} = \sqrt{2n}\end{aligned}$$

Luego, para que m sea un número natural, es necesario que $n = 2t^2$, siendo t cualquier número natural; de modo que si $n = 2t^2$, entonces $m = 2t$.

Reemplazando los valores obtenidos para m y n en (1.3), se tiene:

$$(x^2 + 2txy + 2t^2y^2)^2 = \{x(x + 2ty)\}^2 + 2t^2y^2\,(2x^2 + 4txy + 2t^2y^2)$$

$$(x^2 + 2txy + 2t^2y^2)^2 = x^2(x^2 + 4txy + (2t)^2y^2) + 4t^2y^2\,(x^2 + 2txy + t^2y^2)$$

$$(x^2 + 2(ty)x + 2(ty)^2)^2 = x^2(x^2 + 2x\,(2ty) + (2ty)^2) + 4t^2y^2\,(x^2 + 2(ty)\,x + (ty)^2)$$

$$(x^2 + 2(ty)x + 2(ty)^2)^2 = x^2(x + 2ty)^2 + 4t^2y^2\,(x + ty)^2$$

$$(x^2 + 2(ty)x + 2(ty)^2)^2 = [x(x + 2ty)]^2 + [2(ty)\,(x + ty)]^2$$

Tomando $z=ty$ se tiene:

$$(\mathrm{x}^2 + 2zx + 2z^2)^2 = [x(x + 2z)]^2 + [2z(x + z)]^2 \qquad (2.1)$$

Esto nos indica que solamente el cuadrado de trinomios reducibles a $x^2 + 2zx + 2z^2$ puede ser expresado como una suma de cuadrados.

Ahora, si x y z se reemplazan por números naturales, entonces la terna $(x(x + 2z), 2z(x + z), x^2 + 2zx + 2z^2)$ es pitagórica, ya que se satisface (2.1).

Puesto que $(x^2 + 2zx + 2z^2)^2 = [x(x + 2z)]^2 + [2z(x + z)]^2$ puede expresarse como

$$(x^2 + 2zx + 2z^2)^2 = (xz)^2\{ [(\frac{x}{z} + 2)]^2 + [2(\frac{z}{x} + 1)]^2\},$$

entonces

$$(x^2 + 2zx + 2z^2)^2 = (xz)^2 \{ (\frac{x}{z} + 2)^2 + (\frac{2z}{x} + 2)^2\}, \quad (2.2)$$

Ecuación en la que podemos ver claramente la solución al problema propuesto en *http:/www. maths. uts. edu. co/ numericon/ triples. html*, donde se sugiere una manera extraña de determinar ternas pitagóricas:

> «*Tome 2 fracciones positivas cuyo producto sea 2 y súmele 2 a ambas.*
>
> *Tome las nuevas fracciones y forme dos números de la siguiente manera: Multiplique el denominador de la primera fracción por el numerador de la segunda y el denominador de la segunda fracción por el numerador de la primera. Así, al sumar los cuadrados de los números resultantes se obtiene un cuadrado perfecto*».

Sigamos lo propuesto y verifiquemos que, en efecto, de esta manera se obtienen ternas pitagóricas:

Si $x \neq 0$, $y \neq 0$, entonces el producto de las fracciones positivas $\frac{x}{y}$ y $\frac{2y}{x}$ es igual a 2.

Sumándole 2 a cada fracción se obtiene $w = \frac{x + 2y}{y}$ y $v = \frac{2y + 2x}{x}$

Multiplicando el denominador de la segunda fracción al numerador de la primera, se obtiene $d = x(x + 2y)$.

Multiplicando el denominador de la primera fracción al numerador de la segunda, se obtiene $f = y(2y + 2x) = 2y(y + x)$.

Obsérvese que

$d = xy\,(\frac{x}{y} + 2)$ y $f = xy\,(\frac{2y}{x} + 2)$, además

$$d^2 + f^2 = (xy)^2 \{(\frac{x}{y} + 2)^2 + (\frac{2y}{x} + 2)^2\},$$

que de acuerdo con (2.2) resulta ser un cuadrado perfecto; por lo tanto $(d, f, d^2 + f^2)$ es una terna pitagórica.

CONCLUSIONES

El probar lo propuesto en *http:/ www. maths. uts. edu. co/ numericon/ triples. html* realmente nos conduce a la obtención de un cuadrado perfecto, como puede apreciarse en la verificación expuesta; ahora, a la pregunta: ¿Cuáles son los trinomios de la forma $x^2 + mxy + ny^2$, con m y n naturales, que pueden ser expresados como una suma de cuadrados?, vemos que al efectuar el desarrollo y obtener la ecuación (2.1) se deduce que sólo el cuadrado de trinomios reducibles a $x^2 + 2xz + 2z^2$ puede ser expresado como suma de cuadrados.

Como una consecuencia de los resultados obtenidos, es posible generar ternas pitagóricas utilizando la ecuación (2.1) al reemplazar las variables por números naturales.

Se deja al lector la verificación de que la ecuación (2.1) puede obtenerse de la ecuación (1.2).