Espacios L^p

Jorge Eliécer Ospino Portillo*

Resumen

En este artículo se demuestra que el ***Espacio*** *L^p es un espacio de* ***Banach;*** *siguiendo el siguiente esquema:*

Demostrando que L^p es normado y que toda sucesión de ***Cauchy*** *de elementos de L^p, converge en L^p, es decir que L^p es completo.*

Como caso particular, se muestra que para $p = 2$, L^2, es un espacio de ***Hilbert.***

Palabras claves: Espacios funcionales, medida, norma, desigualdad de Hölder, exponentes conjugados, espacio de Banach, suceción de Cauchy, espacio completo, espacio de Hilbert.

Abstract

In this article is shown that L^p space is Banach's space, whith the following scheme:

It is demonstrated L^p is normed and eveny Cauchy's succession of elements in L^p converge inL^p. So, L^p is complete.

An particular case, is demonstrated that for $p = 2$, L^2, is a Hilbert's space.

Key words: Functional spaces, measure, rule, Holder's inequalite, conjugated exponents, Banach's space, Cauchy's succession, complete space, Hilbert's space.

Fecha de recepción: 14 de febrero de 2001

1. Introducción

Este artículo es el segundo capítulo del trabajo de grado *Espacios funcionales en el análisis complejo,* con el cual obtuve el título de Especialista en Matemática Avanzada, y en el que se desarrolla el artículo de **Rüeprich, W.** *Workshop on functional analytic methods in complex analysis and applications to partial differential equations.*

* Licenciado en Matemáticas y Física. Universidad del Atlántico. Especialista en Matemáticas Avanzada. Universidad Nacional. Candidato a Magister en Matemáticas. Universidad del Norte-Universidad Nacional. *(e-mail: jeospino@unimail.uninorte.edu.co)*

Los espacios funcionales juegan un papel importante, tanto en la matemática clásica como en la moderna. Sus elementos, funciones continuas o diferenciables o p-integrables, son de mucho interés, y son un gran instrumento para el estudio de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Parciales.

1.1. Definición

Si p y q son números reales positivos tales que $p+q = p \cdot q$ o de forma equivalente $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, entonces se dice que p y q son un par de exponentes conjugados.

1.2. Definición

a) Una colección M de subconjuntos de un conjunto X se dice que es una σ-álgebra en X si M tiene las siguientes propiedades:

i) $X \in M$.

ii) Si $A \in M \Rightarrow A^c \in M$.

iii) Si $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ y si $A_n \in M$, $n = 1, 2, \ldots$ entonces $A \in M$.

b) Si M es una σ-álgebra en X, entonces se dice que X es un espacio medible y a los elementos de M se les llama conjuntos medibles en X.

c) Se llama medida positiva a una función , definida en una σ-álgebra M con valores en $[0, \infty]$ y que es numerablemente aditiva. Esto significa que si $\{A_n\}$ es una colección numerable disyunta de elementos de M, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

d) Se llama espacio de medida a un espacio medible en el que hay definida una medida positiva sobre la σ-álgebra de sus conjuntos medibles.

1.3. Teorema

Sean p y q exponentes conjugados, $1 \leq p < \infty$. Sea X un espacio de medida, con medida μ. Sean f y g funciones medibles en X, con imagen en $[0, \infty]$.

Entonces

$$\int_X f \cdot g d\mu \leq \left\{\int_X f^p d\mu\right\}^{1/p} \cdot \left\{\int_X g^q d\mu\right\}^{1/q}$$

Esta es la desigualdad de Hölder

y

$$\left\{\int_X (f+g)^p d\mu\right\}^{1/p} \leq \left\{\int_X f^p d\mu\right\}^{1/p} + \left\{\int_X g^q d\mu\right\}^{1/q}$$

Esta es la desigualdad de Minkowski.

Si $p = q = 2$, la desigualdad de Hölder se conoce como la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

1.4. Lema (Lema de Fatou)

Si f_n: $X \to [0, \infty]$ es medible, para cada entero positivo n, entonces

$$\int_X \left(\lim_{n\to\infty} \inf f_n\right) d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int_X f_n d\mu$$

1.5. Definición

Un espacio vectorial V es un espacio métrico completo, si y sólo si toda sucesión de Cauchy, de elementos de V, converge en V.

1.6. Definición

Un espacio de Banach es un espacio vectorial normado que es completo, con la métrica definida por su norma.

1.7. Definición

Un espacio métrico es de Hilbert si y sólo si es completo.

1.8. Definición

Sea X un espacio de medida arbitraria, con una medida positiva μ. Si $0 < p < \infty$ y si f es una función compleja medible en X, sea

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} \qquad (1)$$

Se define $L^p(\mu)$ como el conjunto de todas las funciones f para las cuales $\|f\|_p < \infty$.

Se demostrará más adelante que (1) es una norma y se denominará la norma L^p de f.

También,

$$\|f\|_\infty = \operatorname{Sup}_{x \in X} |f(x)| = \inf \operatorname{Sup}_{x \in X - A,\, A \subseteq X,\, \mu(A)=0} |f(x)| \qquad (2)$$

se denominará la norma de L^∞ de f.

2. Teorema

Si p y q son exponentes conjugados, y si $I \le p < \infty$ y si $f \in L^p(\mu)$ y $g \in L^q(\mu)$ entonces y $f . \in L^1(\mu)$ y

$$\|f \cdot g\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_q \qquad (3)$$

Prueba

i) Si $1 \le p < \infty$, (3) es simplemente la desigualdad de Hölder, aplicada a $|f|$ y $|g|$. Teorema 1.3.

ii) Si $p=\infty$, entonces $q=1$ y $|f \cdot g|_1 = |f|_1 |g|_1 \le \|f\|_\infty |g|_1$ e integrando se obtiene $\int_X |f \cdot g|_1 \, d\mu \le \|f\|_\infty \int_X |g|_1 \, d\mu$, luego $\|f \cdot g\|_1 \le \|f\|_\infty \|g\|_1$.

iii) Si $p=1$, entonces $q=\infty$ y la demostración es análoga a ii).

3. Teorema

$L^p(\mu)$ es un espacio de Banach.

Prueba

a) $L^p(\mu)$ es normado, en efecto veamos que (1) es una norma:

$$i) \ \|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} \geq 0.$$

$$ii) \ \|f\|_p = 0 \Leftrightarrow |f|^p = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0.$$

$$iii) \ \|\lambda f\|_p = \left(\int_X |\lambda f|^p \, d\mu\right)^{1/p} = |\lambda| \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} = |\lambda| \|f\|_p .$$

$$iv) \ \|f + g\|_p = \left(\int_X |f + g|^p \, d\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int_X (|f| + |g|)^p \, d\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_X |g|^p \, d\mu\right)^{1/p}$$
$$= \|f\|_p + \|g\|_p .$$

Por la desigualdad de Minkowski (Teorema 1.3). Para $1 < p < \infty$.

Si $p = 1$ se tiene

$$\|f + g\|_1 = \int_X |f + g| d\mu \leq \int_X (|f| + |g|) d\mu = \int_X |f| d\mu + \int_X |g| d\mu = \|f\|_1 + \|g\|_1 .$$

b) L^p (μ) es completo, en efecto:

Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en L^p (μ). Existe entonces una sub-sucesión $\{f_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$, $n_1 < n_2 < \ldots$ tal que

$$\|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\| < 2^{-i}, \quad i = 1,2,\cdots \qquad (4)$$

Hagamos

$$g_k = \sum_{i=1}^{k} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}| \qquad (5)$$

y

$$g = \sum_{i=1}^{\infty} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}| \qquad (6)$$

Como se verifica (4) entonces

$$\|g_k\|_p = \left\| \sum_{i=1}^{\infty} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}| \right\|_p \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\|_p < \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} < 1$$

Para $k = 1, 2, \ldots$

por tanto aplicando el lema de Fatou (Lema 1.4) a $\{g_k\}$ se obtiene que $\|g\|_p \leq 1$. En particular $g(x) < \infty$ en casi todo punto, luego la serie

$$f_{n_1}(x) + \sum_{i=1}^{\infty}\left[f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)\right] \qquad (7)$$

converge absolutamente para casi todo punto $x \in X$. Denotemos por $f(x)$ la suma de (7) para aquellos x en los que (7) converge y hagamos $f(x) = 0$ en el conjunto de medida cero restante.

Como

$$f_{n_1} + \sum_{i=1}^{k-1}\left(f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\right) = f_{n_k} \qquad (8)$$

vemos que $f(x) = \lim_{i\to\infty} f_{n_i}(x)$ en casi todo punto.

Una vez que hemos encontrado una función f que es el límite puntual en casi todo punto de $\{f_{n_i}\}$, hemos de probar que esta f es el límite de $\{f_n\}$ en $L^p(\mu)$.

Elijamos $\varepsilon > 0$. Existe un N tal que $\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$ si $n > N$ y $m > N$. Para todo $m > N$, el lema de Fatou muestra que

$$\int_X |f - f_m|^p \, d\mu \leq \liminf_{n_i\to\infty} \int_X |f_{n_i} - f_m|^p \, d\mu \leq \varepsilon^p \qquad (9)$$

Concluimos que $f - f_m \in L^p(\mu)$ y por tanto $f \in L^p(\mu)$, ya que $f = (f - f_m) + f_m$, y finalmente que $\|f - f_m\| \to 0$ cuando $m \to \infty$.

Esto completa la demostración.

4. Definición

Los espacios $L^p(\mu)$ locales $L^p_{loc}(\mu)$ consisten en todas las funciones f donde las restricciones $f|_k$, para todos los compactos $k \subseteq X$, pertenecen a $L^p(\mu)$.

Por esto el espacio $L^p_{loc}(\mu)$ es más general que el espacio $L^p(\mu)$.

Notamos también el hecho importante que el espacio $L^2(\mu)$ es un espacio de Hilbert, con el producto interno

$$(f,g)=\int_X f\cdot\overline{g}d\mu \qquad (10)$$

El integrando del segundo miembro de (10) está en $L^1(\mu)$, por el teorema 2, luego (f, g) está bien definida.

Notamos que:

$$\|f\|=(f,f)^{1/2}=\left(\int_X |f|^2 d\mu\right)^{1/2}=\|f\|_2 \qquad (11)$$

Como $L^2(\mu)$ es completo (teorema 3) resulta que $L^2(\mu)$ es un espacio de Hilbert.

Para toda otra p no es posible definir un producto interior general. Por lo tanto sólo el espacio $L^2(\mu)$ es un espacio de Hilbert en la escala de todos los espacios $L^p(\mu)$.

Veamos que en efecto (10) es un producto interior:

$i)$ $(f,f)=\int_X f\cdot\overline{f}d\mu=\int_X |f|^2 d\mu\geq 0$

$ii)$ $Si\ f\equiv 0\Rightarrow (f,f)=0,\ y\ si\ (f,f)=0\Rightarrow f\equiv 0$

$iii)$ $(\alpha f,g)=\int_X \alpha f\cdot\overline{g}d\mu=\alpha\int_X f\cdot\overline{g}d\mu=\alpha(f,g)$

$iv)$ $(f+g,h)=\int_X (f+g)\cdot\overline{h}d\mu=\int_X f\cdot\overline{h}d\mu+\int_X g\cdot\overline{h}d\mu=(f,h)+(g,h)$

$v)$ $(g,f)=\int_X g\cdot\overline{f}d\mu\Rightarrow\overline{(g,f)}=\overline{\int_X g\cdot\overline{f}d\mu}=\int_X \overline{g}\cdot\overline{\overline{f}}d\mu=\int_X f\cdot\overline{g}d\mu=(f,g)$

5. Bibliografía

[1] EVANS, L. *Partial Diferential Equations.* Berkeley University of California. Berkeley Mathematics lecture Notes. Vol.3.

[2] KREYZIG, E. *Introductory Functional Analysis with Applications.* John Wiley and Sons. 1989.

[3] OSPINO, J. *Espacios Funcionales en el Análisis Complejo.* Trabajo de grado para obtar el título de Especialista en Matemática avanzada. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá, 1996.

[4] RUDIN, W. *Análisis Real y Complejo.* McGraw-Hill. 1988.
[5] — *Análisis Funcional.* Reverté, 1979.
[6] RÜEPRICH, W. *Workshop on Functional Analytic Methods in Complex Analysis and Applications to Partial Differential Equations.* Martin Luther University. 1988.
[7] YOSIDA, K. *Functional Analysis.* Springer Verlag. 1991.