

Diseño de perfil de levas por curvas de Bézier

Carlos Acevedo Peñaloza*, Salvador Cardona i Foix**,
Jorge Bris Cabrera***

Resumen

En el estudio de la ley de desplazamiento de los mecanismos leva–palpador se puede utilizar casi cualquier tipo de función; comúnmente se ha utilizado funciones polinómicas, sinusoidales y cíclicas; los métodos tradicionales utilizan polinomios algebraicos con base canónica y polinomios trigonométricos con base Fourier, siendo éstos los encontrados en casi todos los textos.

En este trabajo se describe la utilización para el diseño de la ley de desplazamientos de curvas Bézier definidas por polinomios algebraicos con base de Bernstein. Las curvas de Bézier constituyen una buena herramienta para generar las curvas de desplazamiento, velocidad, aceleración y sobreaceleración, debido a que tienen mejores condiciones de continuidad en los puntos de unión de tramos.

Palabras claves: Levas, Curvas de Bézier.

Abstract

For the study of the law of displacement, any type of function can be used. Commonly it has been used polynomial, sinusoidal and cyclic functions. The traditional methods utilize algebraic polynomials with canonical base and trigonometric polynomials with Fourier base, being these used in almost all the texts. The importance of the present work is the utilization of the non-parametric Bézier's curves defined by algebraic polynomials with Bernstein base for the law of displacement.

Key words: Cams, Bézier's Curves.

Fecha de recepción: 5 de marzo de 2004
Fecha de aceptación: 17 de noviembre de 2004

* Ingeniero Mecánico, Universidad Francisco de Paula Santander, Cúcuta (Colombia).
carlos.humberto.acevedo@upc.es

** Ingeniero Mecánico, Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona (España).
salvador.cardona@upc.es

*** Ingeniero Mecánico, Universidad del Norte, Barranquilla (Colombia). Magister en Ingeniería Mecánica, Universidad de los Andes. jbrix@uninorte.edu.co

INTRODUCCIÓN

La mayor parte de la bibliografía básica consultada trata la definición de la ley de desplazamiento del palpador con los denominados métodos tradicionales, los cuales utilizan polinomios algebraicos con base canónica y polinomios trigonométricos con base de Fourier.

Los polinomios algebraicos expresados con base canónica o monomial han tenido amplio uso en la definición de la ley de desplazamiento debido a que son fáciles de manipular. Esta base para grado n consiste en los monomios: $[1, \theta, \theta^2, \dots, \theta^n]$.

$$s(\theta) = \sum_{i=1}^n a_i \theta^i = a_0 + a_1 \theta + a_2 \theta^2 + \dots + a_n \theta^n \quad (1.1)$$

La expresión de un polinomio trigonométrico en la base Fourier es:

$$s(\theta) = c_0 + \sum_{i=1}^n [s_i \sin(i\theta) + c_i \cos(i\theta)] \quad (1.2)$$

Donde a_i , c_i y s_i son los coeficientes de los polinomios anteriores.

Desarrollo matemático de la curva de Bézier

La definición de la ley de desplazamiento del palpador por medio de la base de polinomios de Bernstein de grado n , $B_i^n(u)$ sobre un dominio unitario en Cardona y Clos (2000).

$$B_i^n(u) = \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i} = C_n^i u^i (1-u)^{n-i}; \quad i = 0, \dots, n \quad (1.3)$$

Donde

$$i = 0, \dots, n; \quad B_i^n(u) = 0 \quad i \notin \{0, \dots, n\}$$

Con las siguientes propiedades:

- Satisfacen la fórmula recursiva

$$i \in \{0, \dots, n\}: B_i^n(u) = (1-u)B_i^{n-1}(u) + uB_{i-1}^{n-1}(u) \quad \text{con} \quad B_0^0 = 1$$

- Son una partición de la unidad $\sum_{i=0}^n B_i^n(u) = 1$
- Positividad $B_i^n(u) \geq 0, u \in [0,1]$
- Simetría $B_i^n(u) = B_{n-i}^n(1-u)$
- Presentan un máximo para la abscisa $u = \frac{i}{n}$
- Constituye una base numérica estable

En esta base, una función polinómica $b(u)$ de grado n se expresa de la siguiente manera:

$$b(u) = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(u) \quad u \in [0,1] \tag{1.4}$$

Donde los $n+1$ coeficientes b_i se denominan ordenadas de Bézier. El gráfico de la función $b(u)$ se llama *curva de Bézier no Paramétrica*. Cada ordenada b_i define un punto b_i de coordenadas $b_i = (1/n, b_i)$ denominado *punto de control*, y dada su definición, se encuentran equiespaciados en el eje de las abscisas.

En la ecuación (1.4) el polinomio $B_i^n(u)$ se puede interpretar como la influencia de b_i en la curva $b(u)$. Esta influencia es máxima para $u=1/n$, donde $B_i^n(u)$ presenta su máximo valor, lo cual coincide con la abscisa del punto b_i ; esto hace que la representación gráfica de la curva tienda a ser próxima a la del polígono de control de la figura. Por lo tanto, al desplazar verticalmente un punto b_i modificando el valor de su ordenada, la curva tiende a seguirlo y se deforma en sus proximidades.

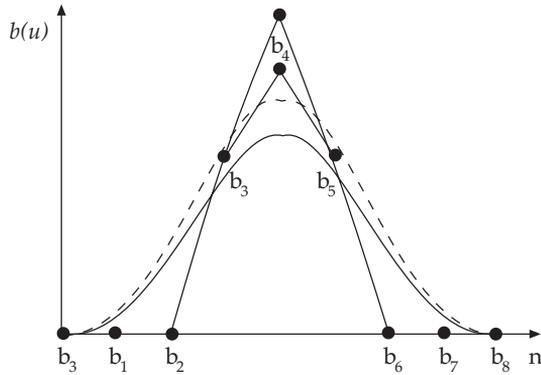


Figura 1. Curva de Bézier. Tomado de Zayas (2001)

Para definir una función $b(\theta)$ con la variable independiente θ definida en el dominio no unitario $\theta \in [\theta_i, \theta_f]$ con la utilización de las curvas de Bézier $b(u)$ definidas en un dominio unitario $u \in [0, 1]$, es necesario realizar en la ecuación (1.4) el siguiente cambio lineal de variable:

$$\begin{aligned} \theta \in [\theta_i, \theta_f] &\rightarrow u \in [0, 1] \\ u(\theta) &= \frac{\theta - \theta_i}{\theta_f - \theta_i} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Usualmente es necesario la derivada de $b(\theta)$ respecto a θ , en cuyo caso ésta se calcula así:

$$\frac{db(u(\theta))}{d\theta} = \frac{db(u)}{du} \cdot \frac{du(\theta)}{d\theta} = \frac{db(u)}{du} \cdot \frac{1}{\theta_f - \theta_i} \quad (1.6)$$

La derivada $b'(u)$ de un polinomio $b(u)$ de grado n es un polinomio de grado $n' = n-1$. En la base Bernstein se puede comprobar que los coeficientes b'_i de la derivada se obtienen como

$$b'_i = n(b_{i+1} - b_i) \quad i = 0, \dots, n-1 \quad (1.7)$$

Esto indica que las derivadas r -ésimas en los extremos $u=0$, $u=1$ sólo dependen de los $r+1$ puntos de control más próximos, es decir, en $u=0$ sólo depende de los coeficientes $b_0 \dots b_r$ y en $u=1$ de los coeficientes $b_{n-r} \dots b_n$. Por lo tanto, la imposición de condiciones de continuidad r -ésima en la unión entre

dos curvas resulta más sencilla en la base de Bernstein que en la base canónica o monomial, ya que sólo se ven involucrados $r+1$ coeficientes de cada curva.

Debido a esto, las curvas de Bézier no paramétrica constituyen una buena herramienta para generar las curvas de desplazamiento, velocidad, aceleración y sobreaceleración de trabajo en levas.

Diseño del perfil

Al definir el perfil de una leva es necesario elegir el movimiento del palpador de acuerdo a los requerimientos de baja o alta velocidad del sistema (Erdman y Sandor, 1984). Los métodos tradicionales que utilizan curvas parabólicas, cíclicas, armónicas, comúnmente se han utilizado para sistemas a baja velocidad, movimiento parabólico con aceleración y desaceleración constantes, parabólicos con velocidad constante, en algunos casos armónicos simples o cicloidales. Los movimientos parabólicos, aunque presentan menores valores de aceleraciones teóricas que en el caso del diseño del perfil de levas, lo cual es un aspecto deseable, tienen la desventaja respecto a las funciones armónicas simples y a las cíclicas de que para intervalos iguales de tiempo el ángulo de presión tiene valores menores y, por lo tanto, el sistema requiere menos fuerza operativa.

En las levas que trabajan a altas velocidades, la selección del movimiento del palpador no debe estar basado sólo en el movimiento sino en las fuerzas que actúan en el sistema como resultado del movimiento empleado. Ahora, con la tendencia moderna hacia mayores velocidades de las máquinas, ha sido necesario tener en cuenta las características dinámicas del sistema y seleccionar un contorno de leva que minimice la carga dinámica e impida la separación de la leva y el palpador.

Diseño de perfil de levas por tramos

El diseño del perfil de levas por tramos es el comúnmente encontrado en los textos y trabajos existentes. Klopmok y Muffly (1955), a pesar de la amplia variedad de levas y de sus diferentes formas, hicieron posible estandarizar las curvas para un cierto número de tipos de curvas de desplazamiento, siendo esta estandarización la encontrada en la gran mayoría de textos.

Este trabajo muestra el desarrollo de estandarización para levas que trabajan a altas velocidades con leyes de desplazamiento definidas como curvas de Bézier de grado siete y continuidad en los tramos de transición de

altura en subida completa y bajada completa y de grado seis para los tramos de media subida inicio y final y media bajada inicio y final.

Subida completa

$$b(u) + L[35u^4 - 84u^5 + 70u^6 - 20u^7]$$

$$b'(u) + L[140u^3 - 420u^4 + 420u^5 - 140u^6]$$

$$b''(u) + \frac{L}{2}[420u^2 - 1680u^3 + 2110u^4 - 840u^5]$$

$$b'''(u) + \frac{L}{3}[840u - 5040u^2 + 8400u - 420u^4]$$

Media subida final

$$b(u) + L[5u^4 - 6u^5 + 2u^6]$$

$$b'(u) + \frac{L}{\beta}[20u^3 - 30u^4 + 120u^5]$$

$$b''(u) + \frac{L}{\beta^2}[60u^2 - 120u^3 + 60u^4]$$

$$b'''(u) + \frac{L}{\beta^3}[120u - 360u^2 + 240u^3]$$

Bajada completa

$$b(u) + L[1 - 35u^4 + 84u^5 - 70u^6 + 20u^7]$$

$$b'(u) + \frac{L}{\beta}[-140u^3 + 420u^4 - 420u^5 + 140u^6]$$

$$b''(u) + \frac{L}{\beta^2}[-420u^2 + 168u^3 - 2100u^4 + 840u^5]$$

$$b'''(u) + \frac{L}{\beta^3}[-840u - 4040u^2 - 8400u^3 + 4200u^4]$$

Media bajada inicio

$$b(u) + L[5u^4 - 6u^5 + 2u^6]$$

$$b'(u) + \frac{L}{\beta}[20u^3 - 30u^4 + 12u^5]$$

$$b''(u) + \frac{L}{\beta^2}[60u^2 - 120u^3 + 60u^4]$$

$$b'''(u) + \frac{L}{\beta^3}[120u - 360u^2 + 240u^3]$$

Media subida inicio

$$b(u) + L[5u^4 - 6u^5 + 2u^6]$$

$$b'(u) + \frac{L}{\beta}[20u^3 - 30u^4 + 12u^5]$$

$$b''(u) + \frac{L}{\beta^2}[60u^2 - 120u^3 + 60u^4]$$

$$b'''(u) + \frac{L}{\beta^3}[120u - 360u^2 + 240u^3]$$

Media bajada final

$$b(u) + L[1 - 2u + 5u^4 - 6u^5 + 2u^6]$$

$$b'(u) + \frac{L}{\beta}[-2u + 20u^3 - 30u^4 + 12u^5]$$

$$b''(u) + \frac{L}{\beta^2}[60u^2 - 120u^3 + 60u^4]$$

$$b'''(u) + \frac{L}{\beta^3}[120u - 360u^2 + 240u^3]$$

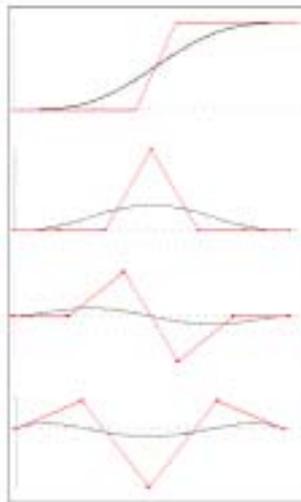


Figura 1. Curva de Bézier
n=7. Subida completa

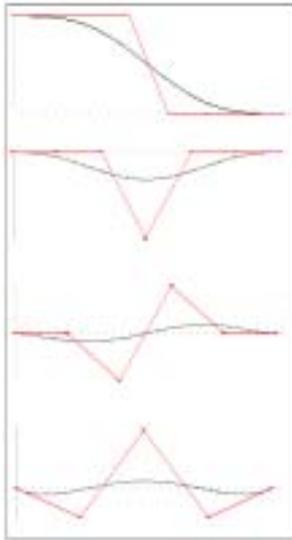


Figura 2. Curva de Bézier
n=7. Bajada completa

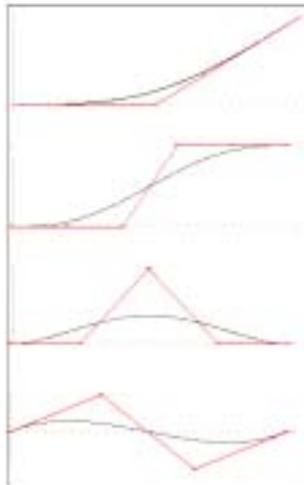


Figura 3. Curva de Bézier
n=6. Media subida inicio

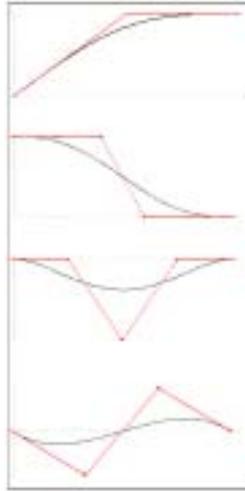


Figura 4. Curva de Bézier $n=6$. Media subida final.

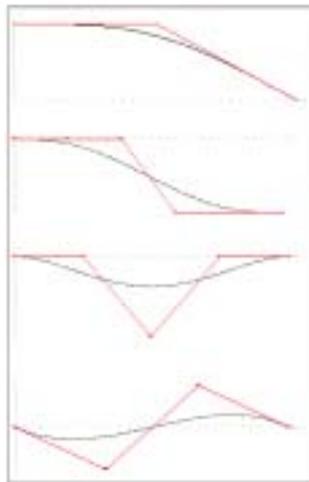


Figura 5. Curva de Bézier $n=6$. Media bajada inicio

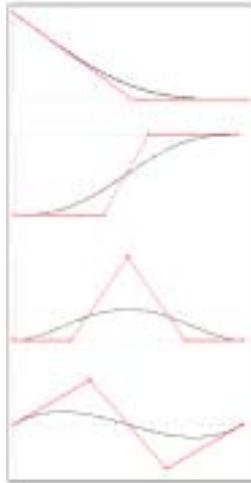
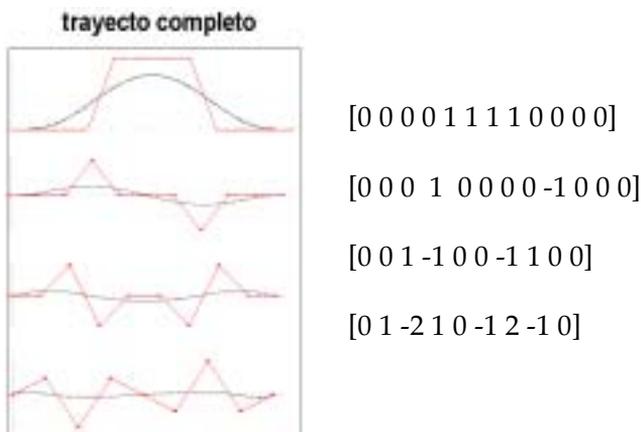


Figura 6. Curva de Bézier
n=6. Media bajada final

Diseño de perfil de levas para trayectos completos

Una de las más significativas ventajas que presentan las curvas de Bézier respecto al proceso de diseño por los métodos tradicionales, es que aunque anteriormente se definió el uso de tablas para diseñar levas con curvas de Bézier por tramos, igualmente el proceso se puede desarrollar para trayectos completos con sólo tener en cuenta la posición de los puntos de control, los cuales son los encargados de definir el contorno de la leva. A manera de ejemplo se indica el uso de los puntos de control para definir una leva a trayectos completos:



CONCLUSIONES

La escogencia de las funciones de desplazamiento, velocidad y aceleración es un aspecto importante en el diseño de levas. Su manejo en la formulación general y en la construcción geométrica hace que se deba tener un buen criterio de selección por parte del diseñador o proyectista de máquinas.

En las curvas de Bézier se pueden controlar las aceleraciones de la ley de desplazamiento por medio de la manipulación de los puntos de control, por lo tanto se controla los efectos dinámicos debidos a la aceleración del palpador, lo cual no ocurre con el uso de los métodos tradicionales, en los que no es posible la manipulación de la curva.

Las curvas de Bézier, comparativamente con los métodos tradicionales, son más sencillas de utilizar debido a su naturaleza geométrica intuitiva, es decir, los polinomios de base canónica o de base Fourier no tienen significado geométrico, y por lo tanto un determinado cambio en un coeficiente no produce un efecto intuitivo sobre la forma de la función que se va a generar o que se desea obtener, aspecto éste que no ocurre al utilizar las curvas de Bézier, debido a que con una correcta manipulación de los puntos de control se obtiene el perfil deseado.

Las curvas de Bézier no son un caso particular de diseño para cada leva, como ocurre en las curvas tradicionales, que tienen la desventaja de que los coeficientes de los polinomios son el resultado de un sistema de ecuaciones con sus respectivas restricciones y, por lo tanto, son un caso particular para cada estudio.

Las curvas de Bézier en los puntos de imposición de las condiciones de continuidad en la unión entre los tramos de Detención, Subida y Bajada, son más sencillas de utilizar que las curvas tradicionales, que son más laboriosas, debido a la facilidad de manipulación de los puntos de control.

Agradecimiento

A Héctor Fabio Quintero Riaza, profesor de la Universidad Tecnológica de Pereira (Colombia), por la revisión crítica de este trabajo.

Bibliografía

- AGULLÓ, J. (1996). *Mecánica de la partícula y del sólido rígido*, 2ª ed. Barcelona, OK Punt, p. 440.
- CARDONA, S. & CLOS, D.(2000). *Teoría de Màquines*, 2ª edición en catalán. Barcelona, Ediciones UPC, p. 248.
- CALERO PÉREZ, R. & CARTA GONZÁLEZ, J. A. (1999). Mecanismos de Levas. En R. Calero PÉREZ, y J.A. CARTA GONZÁLEZ, *Fundamentos de mecanismos y máquinas para ingenieros*. Madrid, McGraw-Hill, p. 215-246.
- CHANG, Sun-Lai (1994). Analysis and Synthesis of the Dual Roller-Cam Mechanism. *Machine Elements and Machine Dynamics*, Vol. 714, p. 247-252.
- ERDMAN, A. G. & SANDOR, G. N. (1984) Cam Design. En A. G. Erdman, & G. N. Sandor, *Mechanism Design: Analysis and Synthesis*. New Jersey, Prentice-Hall, p. 271-339.
- NEAMTU, M., POTTMAN, H.& SCHUMAKER, L. (1996). Homogeneous Splines and Rotational Curves whit Rotational Offsets. Technische Universität Wien. Institut für Geometrie. *Technical Report* N° 29, p.17.
- NORTON, R. (1995). Diseño de levas. En R. Norton, *Diseño de Maquinaria*. México, McGraw-Hill, p. 327-436.
- (1995). *Cam design and manufacturing handbook*. Industrial press inc, pp. 69-126; 152-176.
- REYES POZO, G. (2000) Técnicas de diseño geométrico asistido por ordenador para mecanismos leva-palpador. Tesis doctoral, Universidad Politécnica de Cataluña, p. 136.
- ROTHBART, H. (1956). *Cams, Design, Dynamics and Accuracy*. New York, Jhon Wiley & Sons.
- SÁNCHEZ-REYES, J. & REYES POZO, G. (1997). Curvas de Bézier y B-splines no paramétricas para la definición de leyes de movimiento en mecanismos de leva. *Anales de Ingeniería Mecánica*, Año 12, Vol. 13, p. 123-130.
- SÁNCHEZ-REYES, J. (1997). Higher order Bézier circles. *Computer Aided Desing*, Vol. 29, N° 6, p. 469-472. Technical Note.
- SHIGLEY, J. E. & UICKER Jr., J. J. (1988). Diseño de levas. En J. E. Shigley & J. J. Uicker Jr., *Teoría de Mecanismos y Máquinas*. México, McGraw-Hill, p. 204-257.
- ZAYAS, E., (2001). Aportación al estudio de levas desmodrómicas. Tesis doctoral.