

Modelamiento, simulación y construcción de un absorbedor de vibraciones no viscoso*

William Romero Restrepo**, Francisco Acuña Garrido*** y
Marco Sanjuán Mejía****

Resumen

En este artículo se presenta la aplicación de Matlab como una herramienta para el análisis de un sistema de vibración de dos grados de libertad modelar y simular el comportamiento de un absorbedor de vibraciones usando datos experimentales tomados de la construcción de un modelo real físico. Se presentan datos y gráficas donde se ilustra el comportamiento del sistema en resonancia con el absorbedor y sin éste.

Palabras clave: Vibración, absorbedor, modelamiento.

Abstract

This paper presents a Matlab Application to analyze a two degrees of freedom (2DOF) vibrational system, in order to simulate the vibration absorber behavior. The input datas has been taken from the physical model which was built up to support the experimentation. Also, the behavior of the primary mass with absorber and without absorber are compared to obtain the effects in displacement and frequency. Several plots relating the discussed behavior are presented.

Key words: Vibrations, Absorber, Modeling.

Fecha de recepción: 8 de octubre de 2002

INTRODUCCIÓN

Frecuentemente el desbalance de máquinas rotatorias produce excitación armónica, las cuales son indeseables en la mayoría de los casos, ya que pueden afectar el funcionamiento de la máquina y la estructura sobre la cual se encuentra instalada. El

* Artículo derivado de la investigación *Diseño de compensadores estáticos para máquinas vibratorias*. Grupo Vibraciones en Máquina y Control de Ruido. Universidad del Norte.

** Ingeniero Mecánico, Universidad del Atlántico. Candidato a M.Sc. en Ingeniería Mecánica, Universidad del Norte.

*** Ingeniero Mecánico, Universidad del Norte. Diplomado en Gestión Ambiental. Profesor de tiempo completo del Departamento de Ingeniería Mecánica, Universidad del Norte. Miembro del grupo de investigación Gas Natural y Termodinámica. Candidato a M.Sc. en Ingeniería Mecánica, Universidad del Norte. facuna@uninorte.edu.co

**** Ingeniero Mecánico, Universidad del Norte. Doctorado en Ciencias de la Ingeniería, Universidad del Sur de la Florida (USA). Jefe de Departamento de Ingeniería Mecánica de la Universidad del Norte. msanjuan@uninorte.edu.co

uso de absorbedores evita la resonancia al no permitir el desarrollo de grandes amplitudes que de no controlarse, pueden conducir a la destrucción de dispositivos rotatorios. Este es uno de varios métodos de control de vibraciones forzadas existentes y su aplicación depende de la no flexibilidad que presente el sistema para variar su estructura.

1. FUENTE DE EXCITACIÓN

Considerando una máquina rotatoria desbalanceada como fuente de excitación, donde se supone que la respuesta de vibración se da a la misma frecuencia de la fuerza perturbadora, como lo muestra la figura 1.

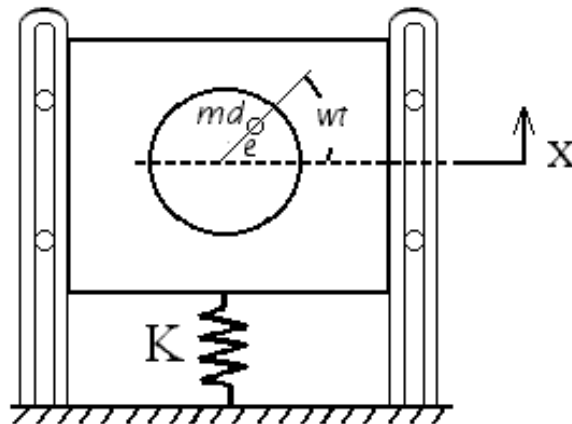


Figura 1. Representación esquemática de una máquina rotatoria desbalanceada

Donde el desbalance es representado por una pequeña masa m^d descentrada a una distancia e y que gira con una velocidad constante w^d , generando así una excitación armónica, la cual se desea contrarrestar [Thomson, 1988]. Para ello, con base en un sistema de vibración masa-resorte de un grado de libertad se contruyó un modelo físico con el fin de obtener experimentalmente las constantes de rigidez de distintos resortes lineales a los que se les adhería masas considerables para evitar entrar en resonancia, ya que diseñar un amortiguador para un sistema que no esté cercano a su frecuencia de resonancia no tiene sentido. Para evitar movimientos laterales, propios de la vibración y que dificultan la medición de amplitudes, es ventajoso añadir guías verticales.

La siguiente tabla contiene los datos del sistema real desbalanceado.

Tabla 1

Datos determinados experimentalmente del sistema principal

VARIABLE	VALOR	UNIDADES
m^d	0.064	Kg
r^d	0.025	m
w^d	480	r.p.m
masa principal	1.753	Kg

2. ABSORBEDOR DE VIBRACIONES

Un absorbedor de vibraciones no es más que en un sistema vibratorio masa-resorte relativamente pequeño acoplado a la masa principal M_1 , y sintonizado de tal manera que su frecuencia natural $(k_2/m_2)^{1/2}$ sea igual a la frecuencia w de la fuerza excitatriz o perturbadora del sistema principal. Entonces, la masa principal reducirá su movimiento notoriamente, y el pequeño sistema k_2 y m_2 entrará en resonancia de forma que su fuerza de resorte será en todo momento igual y en sentido contrario a la fuerza excitadora $P_0 \text{sen} \omega t$. Así, no habrá ninguna fuerza neta actuando sobre M_1 y, por tanto, la masa no vibrará.

3. ECUACIONES DE MOVIMIENTO

Cuando adicionamos un absorbedor de vibración a un sistema vibratorio de un grado de libertad, el sistema vibratorio total es un sistema de dos grados de libertad. Se dice que un sistema de vibración tiene tantos grados de libertad como coordenadas se requieran para describir su movimiento. Así los siguientes esquemas conducen a las ecuaciones gobernantes del sistema vibratorio total:

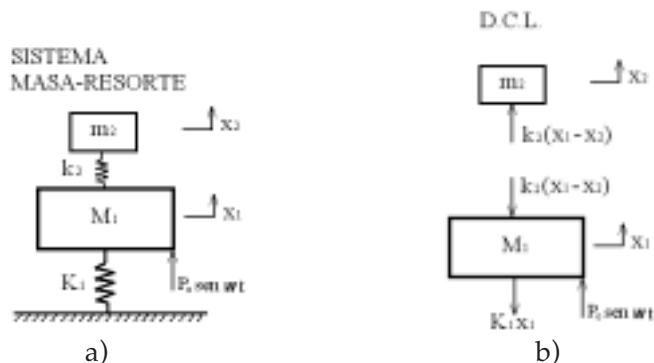


Figura 2. a) Representación masa-resorte de un absorbedor de vibraciones no viscoso.

b) Diagrama de cuerpo libre del absorbedor de vibraciones

En la figura 2 es notorio que se necesitan dos sistemas de coordenadas independientes para describir el movimiento de las masas involucradas en el sistema; x_1 y x_2 representan la posición de cada masa respecto a los resortes no deformados. Se asume que ambos resortes son lineales.

Ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned} M_1 \ddot{x}_2 + (K_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 &= P_o \text{ sen} \omega t \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_1 (x_2 - x_1) &= 0 \end{aligned}$$

La vibración forzada del sistema se dará a la misma frecuencia de excitación y será de la forma

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 \text{ sen} \omega t \\ x_2 &= a_2 \text{ sen} \omega t \end{aligned}$$

La suposición de que el movimiento es armónico es evidente, ya que las ecuaciones gobernantes contienen sólo los términos x_1 , x_2 y \ddot{x}_1 , \ddot{x}_2 , pero no así las primeras derivadas [Hartog, 1969]. La función seno resulta ser nuevamente la función seno después de obtener su segunda derivada, y en consecuencia, con el supuesto (de que los desplazamientos son de forma armónica) todos los términos de la ecuación para x_1 y x_2 serán proporcionales a $\text{sen} \omega t$.

Al dividir entre $\text{sen} \omega t$, la ecuación diferencial se transforma en una ecuación algebraica:

$$\begin{aligned} a_1 (M\omega^2 + K + k) - ka_2 &= P_o \\ -ka_2 + a_2 (-m\omega^2 + k) &= 0 \end{aligned}$$

En forma adimensional, se introducen los siguientes parámetros:

$$X_{st} = \frac{P_o}{K} = \text{Deformación estática del sistema principal}$$

$$\omega_a^2 = \frac{k}{m} = \text{Frecuencia natural del absorbedor}$$

$$\Omega_n^2 = \frac{K}{M} = \text{Frecuencia natural del sistema principal}$$

$$\mu = \frac{m}{M} = \text{Proporción de masas}$$

Así, la ecuación resulta

$$\begin{aligned} a_1 \left(1 + \frac{k}{K} - \frac{\omega^2}{\Omega_n^2} \right) - a_2 \frac{k}{m} &= X_{st} \\ a_1 &= a_2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_a^2} \right) \end{aligned}$$

○ resolviendo para a_1 y a_2

$$\frac{a_1}{x_{st}} = \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_a^2}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_a^2}\right)\left(1 + \frac{k}{K} - \frac{\omega^2}{\Omega_n^2}\right) - \frac{k}{K}}$$

$$\frac{a_2}{x_{st}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_a^2}\right)\left(1 + \frac{k}{K} - \frac{\omega^2}{\Omega_n^2}\right) - \frac{k}{K}}$$

Aquí se observa que la amplitud a_1 de la masa principal es cero cuando el numerador $\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_a^2}\right)$ es cero, y esto sucede cuando la frecuencia de la fuerza es la misma que la frecuencia natural del absorbedor.

En la segunda ecuación, para el caso en que $\omega = \omega_a$, el primer factor del denominador es cero, de manera que la ecuación se reduce a

$$a_1 = \frac{K}{k} x_{st} = -\frac{P_o}{k}$$

Ahora, con la masa principal en reposo y la masa del amortiguador moviéndose de acuerdo con $-\frac{P_o}{k} \text{sen} \omega t$, la fuerza en el resorte amortiguador varía según $-P_o \text{sen} \omega t$, que es siempre igual y en sentido contrario a la fuerza exterior.

Estas relaciones son ciertas para cualquier valor de $\frac{\omega}{\Omega_n}$. Consideramos ahora el caso para el cual el absorbedor está en resonancia

$$\omega_a = \Omega_n \quad \text{o} \quad \frac{k}{m} = \frac{K}{M}$$

La razón $\mu = \frac{m}{M}$ define el tamaño del amortiguador con el tamaño del sistema principal; en este caso particular la ecuación resulta:

$$\frac{x_1}{x_{st}} = \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_a^2}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_a^2}\right)\left(1 + \mu - \frac{\omega^2}{\omega_a^2}\right) - \mu} \text{sen} \omega t$$

$$\frac{x_2}{x_{st}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_a^2}\right)\left(1 + \mu - \frac{\omega^2}{\omega_a^2}\right) - \mu} \text{sen} \omega t$$

Notamos aquí que ambos denominadores son iguales, y ésta no es una coincidencia, sino que tiene una razón física definida. Al multiplicar en el denominador se ve que contiene un término proporcional a $(\omega^2 / \omega_a^2)^2$, otro término proporcional a $(\omega^2 / \omega_a^2)^1$, y un término independiente de esta razón. Luego al igualarla a cero, el denominador es una ecuación de segundo grado en ω^2 / ω_a^2 , y tiene por tanto dos raíces. Así, para dos valores de frecuencia exterior a ω los dos denominadores de la ecuación se hacen cero, y en consecuencia, los valores de x_1 y x_2 se hacen infinitamente grandes. Estas dos frecuencias son la *natural* y la de *resonancia* del sistema.

4. DESCRIPCIÓN DEL SISTEMA PRINCIPAL

El sistema principal consta de un pequeño motor de inducción de 100V y 0.3A anclado a una estructura metálica y cuatro resortes idénticos como lo muestra la figura 3. Los resortes, de igual diámetro y longitud, están dispuestos en paralelo, con constantes de rigidez calculadas en 1112N /m cada uno y cuyo valor equivalente en el sistema principal es de 4448 N /m. La masa principal del sistema es la masa oscilante, es decir, el motor en desbalance y la placa metálica de anclaje, los resortes y el resto de la estructura no hacen parte de la masa principal. Esta masa es de 1.753 Kg aproximadamente.

La frecuencia natural del sistema principal está dada por $\sqrt{\frac{K_{eq}}{M_1}}$. Así, para los datos del modelo físico construido, su frecuencia natural será:

$$\Omega_n^2 = \sqrt{\frac{K_{eq}}{M_1}} = \sqrt{\frac{4448}{1.753}} = 50.04s^{-1}$$

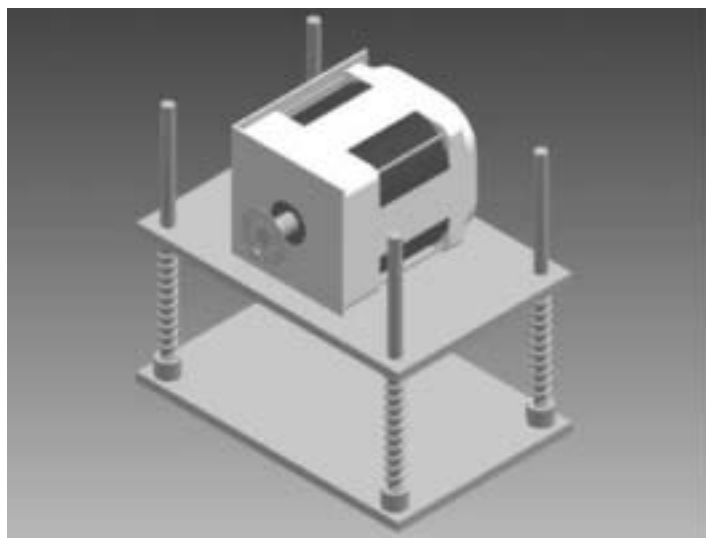


Figura 3. Montaje del sistema principal masa - resorte

5. SELECCIÓN DEL ABSORBEDOR NO VISCOSO

La frecuencia natural del absorbedor acoplado al sistema se selecciona de tal manera que su frecuencia natural sea igual a la frecuencia de la fuerza perturbadora. Así, para la construcción del absorbedor se selecciona un resorte único con una constante de rigidez de 160.25 N / m y se calcula una masa m_1 , la cual cumpla rigurosamente con la condición anteriormente planteada:

$$w_a^2 = \sqrt{\frac{k}{m_2}} = \sqrt{\frac{160.25}{m_2}} = 50.04s^{-1}$$

Despejando m_2 de la ecuación, se necesita una masa de 64 gramos para que el absorbedor entre en la frecuencia de resonancia.

6. SIMULACIÓN DEL ABSORBEDOR DE VIBRACIONES NO VISCOSO

La mejor forma para la descripción de un problema es la simulación de su salida cuando se tienen una o varias entradas. Para ello fueron montadas en simulink las ecuaciones gobernantes del sistema como lo muestra la figura 4, y además se hace una comparación con el sistema original sin absorbedor.

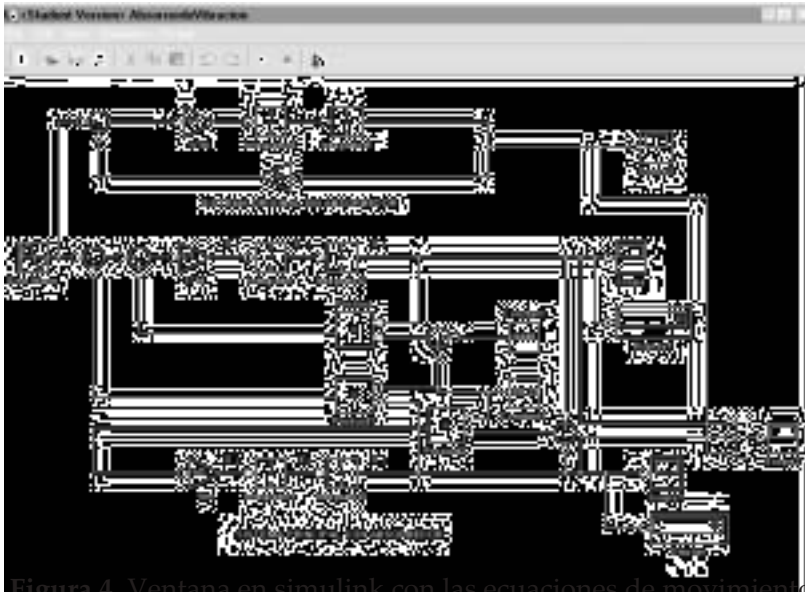


Figura 4. Ventana en simulink con las ecuaciones de movimiento

6.1. COMPORTAMIENTO DINÁMICO DEL SISTEMA ORIGINAL SIN ABSORBEDOR

La primera simulación muestra el comportamiento del sistema original en resonancia en ausencia del absorbedor y cuyo valor máximo de desplazamiento es aproxima-

damente 5 cm. En la figura 5 se observa que el sistema parte del reposo y aumenta progresivamente hasta la amplitud de resonancia.

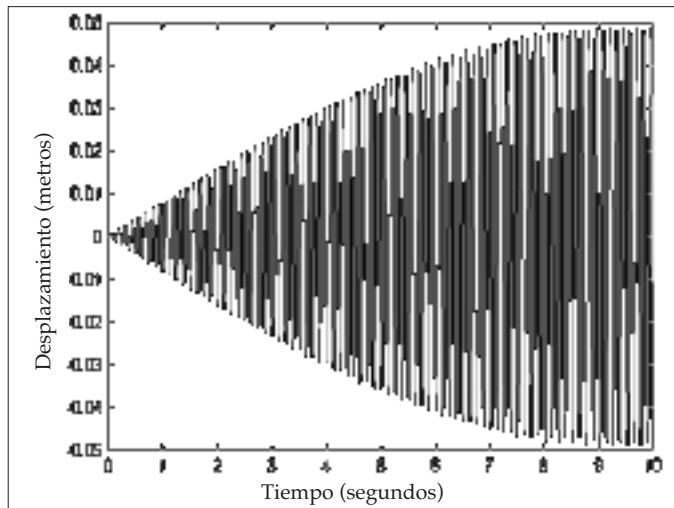


Figura 5. Comportamiento del sistema principal sin amortiguador

6.2. COMPORTAMIENTO DINÁMICO DEL SISTEMA ORIGINAL CON AMORTIGUADOR

En la segunda simulación (figura 6) se muestra claramente que cuando se añade el amortiguador, el desplazamiento de la masa principal se reduce notoriamente y tiende a cero. Ahora es el amortiguador el que presenta grandes amplitudes, y su comportamiento es muy cercano al de resonancia, con un desplazamiento máximo de 1.8 cm aproximadamente.

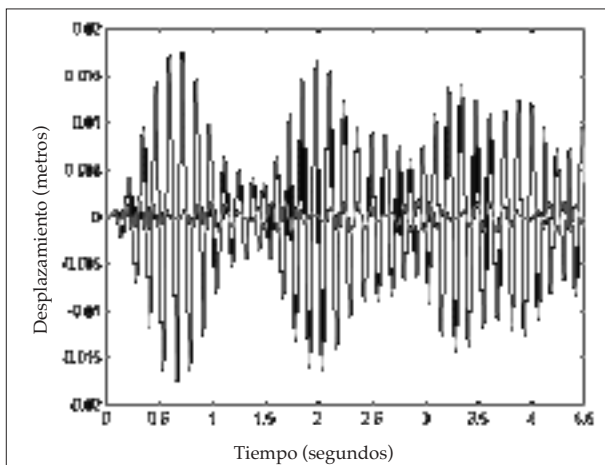


Figura 6
Comportamiento del sistema principal con amortiguador

La figura 7 muestra la superposición de los dos sistemas, sin absorbedor y con él. En la simulación se puede notar que el desplazamiento de la masa principal es siempre y desde un comienzo menor a la que mostraba sin el absorbedor, y además tiende a cero. La reducción en la amplitud máxima es alrededor de 95 por ciento.

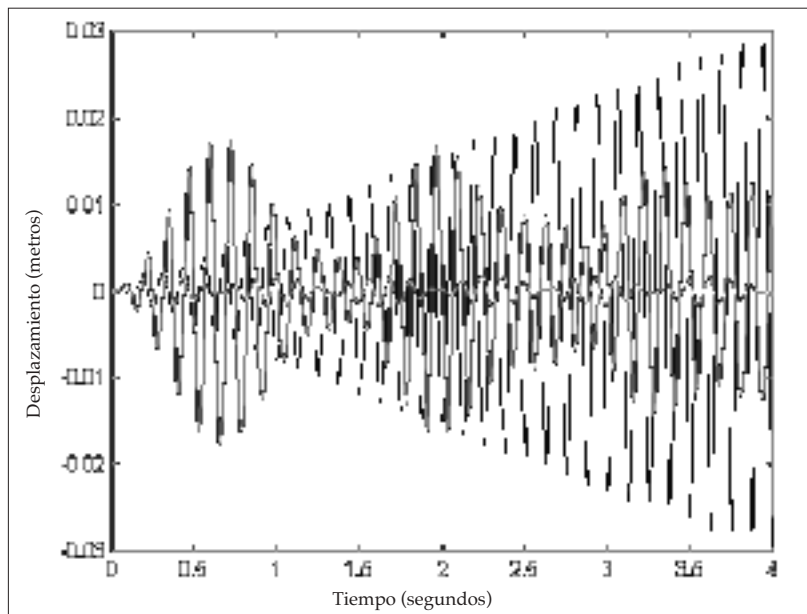


Figura 7. Superposición de los comportamientos sin absorbedor y con él

6.3. CURVA DE RESPUESTA CONTRA FRECUENCIA

Para la relación ω/ω_a expresada en un espectro de frecuencias encontramos que el sistema total vibratorio es solamente útil en los casos en que la fuerza de frecuencia excitadora sea constante y muy cercana a la frecuencia de resonancia. Así se considera este tipo de sistemas como sistemas vibratorios de compensación pasiva, en los cuales sólo se permite trabajar en rangos muy pequeños y no se aplica grandes variaciones. La figura 8 presenta las dos frecuencias naturales para el sistema de dos grados de libertad.



Figura 8. Respuesta Vs. Frecuencia

7. DISEÑO FINAL DEL ABSORBEDOR

El modelo real desarrollado es muy similar al modelo identificado, y es el presentado en la figura 9. A pesar de no contar con dispositivos para la medición de vibraciones, se pudo demostrar empíricamente que existe una notoria disminución de vibraciones en el sistema real después de haber adicionado el absorbedor diseñado; además se comprobó por medio de un calibrador que el desplazamiento de la masa de cobre del absorbedor era de 2 cm aproximadamente, muy cercano al obtenido en la segunda simulación. La figura 9 muestra el modelo final con el absorbedor elaborado en los laboratorios de manufactura de la Universidad del Norte.



Figura 9. Modelo físico

CONCLUSIONES

El sistema analizado es un sistema masa-resorte de dos grados de libertad, el cual tiende a presentar amplitudes relativamente altas, como lo enseña la simulación de la figura 5. Una vez se diseña el absorbedor dinámico no viscoso acorde con la frecuencia natural del sistema, se puede observar en la simulación de la figura 6 una reducción del desplazamiento de la masa principal de aproximadamente 95 por ciento, mientras que el desplazamiento del absorbedor es más pronunciado. Y en efecto, se alcanzó el objetivo principal para el cual se diseñó e implementó este tipo de absorbedor. Para el modelamiento de este sistema vibratorio fue necesario identificar los componentes del sistema, determinar sus propiedades, construir el modelo matemático, las ecuaciones gobernantes, y verificar y comparar los resultados obtenidos con mediciones en un sistema real análogo. El sistema, considerado de acción pasiva, puede presentar regímenes de trabajo, los cuales se encuentren entre las relaciones ω / ω_n de 0.7 y 1.2. Este tipo de sistemas es útil solamente en aplicaciones en que la fuerza de la frecuencia excitadora es aproximadamente constante, como el caso de algunos motores eléctricos, y tiene lugar cuando no es posible realizar variaciones en la estructura original del sistema. Cuando el sistema es flexible y es posible variar la masa, la rigidez u otra característica, se pueden emplear otros métodos de control de vibraciones como el balanceo, el aislamiento o la cancelación activa, entre otros.

Referencias

- EISENMANN, R.C. *Machinery malfunction diagnosis and correction: vibrations analysis and troubleshooting for process industries*. Prentice-Hall, 1998.
- HARRIS, C.M. *Shock and vibration handbook*, 4ª ed. McGraw-Hill, 1995.
- HARTOG, J.P. Den. *Mecánica de las vibraciones*, 4ª ed. México, CECSA, 1969, 138p.
- INMAN, D.J. *Engineering vibration*. Prentice-Hall, 1996.
- MEIROVITCH, L. *Elements of vibration analysis*, 4ª ed. McGraw-Hill, 1986.
- *Principles and techniques of vibrations*. Prentice-Hall, 1997.
- THOMSON, W. *Theory of vibration with applications*, 3ª ed. Englewood Cliffs - Prentice-Hall, 1988, 49-233p.
- TONGUE, B.H. *Principles of vibration*. Oxford University Press, 1996.