

Análisis estadístico de la naturaleza de los componentes del PIB colombiano*

Rafael Guillermo García Cáceres**, María Elsa Correal Núñez***

Resumen

El análisis de la naturaleza de la tendencia es un tema de fundamental importancia en la economía. Este trabajo estudia dicha naturaleza en la serie agregada macroeconómica del PIB trimestral colombiano en el período que comienza el primer trimestre de 1977 y que finaliza el cuarto trimestre del mismo año.

Para tal fin se utilizan diversas metodologías, en las que incluimos los trabajos pioneros de Nelson y Plosser[1], Watson[2], Campbell y Mankiw[3] y Cochrane[4]. Este estudio complementa trabajos previos realizados en Colombia para la misma serie en un período diferente, entre los que se destacan el trabajo realizado por Alejandro Gaviria y José Darío Uribe[5]. Finalmente, basados en el artículo de Beaudry y Koop[6] se analiza la permanencia ante choques recesivos y expansionarios.

Palabras clave: Tendencia estacionaria, diferencia estacionaria, análisis de permanencia, función de respuesta, impulso.

Abstract

The analysis of the nature of tendencies is of fundamental importance in Economics. This article studies such nature in the macroeconomic aggregated series of the Colombian quarterly GIP in the period starting from the first 1977 quarter to the fourth 1977 quarter. We have used different methodologies including the pioneering works of Nelson and Plosser, Watson, Campbell and Mankiw, and Cochrane. This study complements previous works undertaken in Colombia for the same series in a different period. Among others we can mention that carried out by Alejandro Gaviria and José Darío Uribe. Finally, based on the article by Beaudry and Koop, the present work analyses the permanence during the recessive and expansionary crisis.

Key words: Stationary trend, permanence stationary difference, impulse response function.

Fecha de recepción: 23 de octubre de 2002

* Este artículo forma parte de los resultados de la investigación *Análisis estadístico de la naturaleza de los componentes del PIB colombiano*.

** Ingeniero Industrial, UPTC; Magíster en Ingeniería Industrial Universidad de los Andes. Profesor asistente Pontificia Universidad Javeriana.

*** Matemático, Universidad de los Andes; Magíster en Estadística, Universidad de Massachussets. Profesor asistente Universidad de los Andes.

ANTECEDENTES

Las investigaciones enunciadas en el resumen de este trabajo estudiaron el comportamiento de los componentes de series macroeconómicas estadounidenses. En el caso específico del Producto Nacional Bruto (PNB) americano, los resultados acerca de la naturaleza de su no estacionariedad fueron contradictorios. Posteriormente, en el trabajo de Beaudry y Koop se encontraron expansiones permanentes y recesiones transitorias.

INTRODUCCIÓN

A continuación se hace un recuento del trabajo de acuerdo con el orden en que éste se efectuó. Primero se desarrolló la teoría, seguida por los resultados encontrados en el caso colombiano. El título de los apartes y sus contenidos resumidos son mostrados a continuación:

1. Inspección y descripción de la serie: Se estabiliza la serie en la varianza, con el propósito de modelar la serie del PIB trimestral.

Utilizando un esquema similar al efectuado por Romer[7] se determinan las pendientes del crecimiento y las recesiones encontradas en la serie estabilizada, analizando sus características de tiempo y magnitud, con el propósito de hacer una aproximación a la naturaleza de los **componentes** del PIB trimestral colombiano.

2. Análisis de la naturaleza de no estacionariedad basados en el artículo de Nelson y Plosser:

Se analizaron los correlogramas de la serie TS, DS, el **test aumentado de Dickey-Fuller**[8] y los modelos asociados a la metodología, con el fin de determinar la naturaleza de la no estacionariedad.

3. Análisis de permanencia

- 3.1. Análisis de permanencia no paramétrico

Se utilizaron en la mayor parte de este subcapítulo los trabajos de Watson y Cochrane, los cuales fueron desarrollados simultáneamente, dado que Cochrane utiliza implícitamente, en una medida de permanencia, modelos de descomposición de componentes (**permanente y transitorio**) utilizados explícitamente por Watson. Como cualquier proceso puede ser descompuesto en los dos componentes citados anteriormente, la importancia de cada uno de ellos determina la naturaleza dominante del proceso.

La medida de permanencia utilizada por Cochrane fue estimada mediante métodos estadísticos no paramétricos. Campbell y Mankiw determinaron que esta medida es un límite inferior de la ganancia, la cual fue determinada también en forma paramétrica por ellos.

3.2. Análisis de permanencia paramétrico: Utilizando el procedimiento de Campbell y Mankiw se efectúa una estimación paramétrica de la **ganancia**, utilizando **funciones de respuesta impulso lineales**, aplicadas a modelos ARIMA. La ganancia muestra el efecto de la innovación en un horizonte infinito y es la medida de permanencia más representativa por sus implicaciones paramétricas y no paramétricas del proceso.

4. Análisis de permanencia ante choques recesivos y expansionarios: Aunque los anteriores resultados responden la mayor parte de nuestras preguntas, no permiten conocer las posibles diferencias en la permanencia ante innovaciones de sentidos opuestos (llámense expansiones y recesiones), debido a las propiedades de **linealidad, simetría e independencia en la historia**, propias de las funciones de respuesta impulso lineales. Para superar este inconveniente se utilizó el estudio de Beaudry y Koop, en el que se estimaron **funciones de respuesta impulso lineales a funciones de transferencia**.

RESULTADOS

1. Inspección y descripción de la serie

El Departamento de Planeación Nacional suministró la serie del PIB trimestral colombiano. Su período histórico inicia el primer trimestre de 1977 y finaliza el cuarto trimestre del mismo año. Los porcentajes disponibles de fechas posteriores son utilizados en la estimación de las respuestas impulso no lineales.

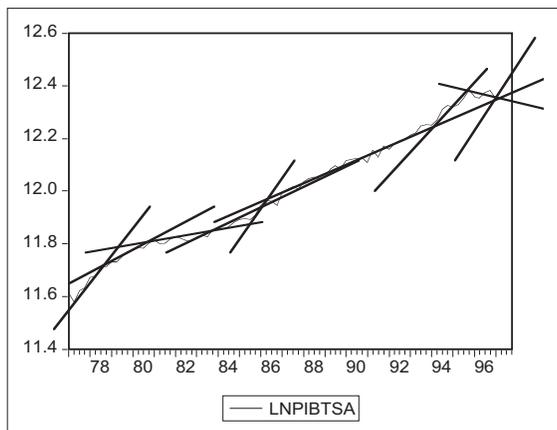


Figura 1. Tendencias y fluctuaciones del PIB colombiano

La serie utilizada es la del logaritmo natural, la cual es posteriormente ajustada estacionalmente, para sustraerle la estación considerada de naturaleza determinística.

La inspección de la serie no mostró una única pendiente; por el contrario, se observaron 9 períodos de «crecimiento», que difieren tanto en inclinación como en duración. Se encontraron 19 recesiones, donde la duración común fue de un trimestre y ocurrieron en la mayoría de las ocasiones una vez al año.

Tabla 1
Recesiones del PIB durante el período de 1977 a 1997

| Año y trimestre inicial de la recesión | Duración de la recesión en trimestres | % de cambio del PIB trimestral durante la recesión | Año y trimestre inicial de la recesión | Duración de la recesión en trimestres | % de cambio del PIB trimestral durante la recesión |
|--|---------------------------------------|--|--|---------------------------------------|--|
| 1977:2 | 1 | -0,30797975 | | | |
| 1979:2 | 1 | -0,00579662 | 1988:4 | 1 | -0,06819149 |
| 1980:3 | 1 | -0,00466773 | 1989:4 | 1 | -0,09408139 |
| 1981:2 | 1 | -0,13575526 | 1991:1 | 1 | -0,14612782 |
| 1982:2 | 3 | -0,12125947 | 1991:3 | 1 | -0,20936645 |
| 1983:3 | 1 | -0,07377217 | 1992:1 | 1 | -0,08085715 |
| 1984:2 | 1 | -0,01500791 | 1994:1 | 1 | -0,00473402 |
| 1985:3 | 1 | -0,02471691 | 1995:1 | 1 | -0,05249208 |
| 1986:3 | 2 | -0,15655522 | 1996:1 | 2 | -0,243555 |
| 1987:4 | 1 | -0,06391499 | 1997:1 | 1 | -0,23105898 |

2. Análisis de la naturaleza de no estacionariedad basados en el artículo de Nelson y Plosser

En un proceso de tendencia estacionaria, la serie destendenciada genera un proceso estacionario, mientras que en un proceso de diferencia estacionaria como una caminata aleatoria con *drift* es adecuadamente estabilizada mediante diferenciación. Los dos procesos difieren también en el error de pronóstico, el cual es cero para el primero, mientras que para el segundo aumenta indefinidamente.

Esto es demostrado a continuación:

- Si tenemos un proceso TS, simple:

$$y_t = \mu + bt + \varepsilon_t \quad (1)$$

Si ha transcurrido k trimestres, entonces:

$$y_{t+k} = \mu + b(t+k) + \varepsilon_{t+k} \quad (2)$$

Cuya esperanza es:

$$E(y_{t+k}) = E(\mu + b(t+k) + \varepsilon_{t+k}) = \mu + b(t+k) \quad (3)$$

La varianza del error de pronóstico está dada por:

$$\text{Var}(y_{t+k} - E(y_{t+k})) = \text{Var}((\mu + b(t+k) + \varepsilon_{t+k}) - (\mu + b(t+k))) = \text{Var}(\varepsilon_{t+k}) = \sigma_\varepsilon^2 \quad (4)$$

Entonces el error de pronóstico es constante en cualquier horizonte.

Por el contrario, si el proceso es una caminata aleatoria con *drift*:

$$y_t = \mu + y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (5)$$

Cuya solución es:

$$y_t = y_0 + \mu t + \sum_{i=0}^t \varepsilon_i \quad (6)$$

Si ha transcurrido k trimestres, entonces:

$$y_{t+k} = y_0 + \mu(t+k) + \sum_{i=0}^{t+k} \varepsilon_i \quad (7)$$

cuya esperanza es:

$$E(y_{t+k}) = E(y_0 + \mu(t+k) + \sum_{i=0}^{t+k} \varepsilon_i) = y_0 + \mu(t+k) \quad (8)$$

la varianza del error de pronóstico está dada por:

$$\text{Var}(y_{t+k} - E(y_{t+k})) = \text{Var}\left[y_0 + \mu(t+k) + \sum_{i=0}^{t+k} \varepsilon_i - y_0 - \mu(t+k)\right] = \text{Var}\left[\sum_{i=0}^{t+k} \varepsilon_i\right] = (t+k) \sigma_\varepsilon^2 \quad (9)$$

la cual aumenta a medida que aumenta el horizonte de pronóstico j.

En un análisis preliminar se pudo modelar la serie destendenciada mediante modelos ARMA, mientras que el correlograma de la primera diferencia sugirió que el logaritmo natural del PIB trimestral podría ser integrado de orden 1. Debido a los resultados contradictorios anteriores fue necesario utilizar el test de Dickey-Fuller. El resultado de la estimación definitiva fue:

$$\Delta y_t = -0.0056517 - 0.001562y_{t-1} + \sum_{i=1}^4 \Delta y_{t-i} + \varepsilon_t \quad (10)$$

Bajo la hipótesis nula de $\gamma=0$, el t-estadístico asociado a γ fue 0.203061, mientras que el valor crítico del test de Dickey-Fuller a una significancia del 5% fue -2.8981. Así entonces el PIB pudo ser modelado por una caminata aleatoria con *drift*.

El anterior análisis permite determinar que el logaritmo natural del PIB trimestral es DS en primera diferencia.

3. Análisis de permanencia

3.1 Análisis de permanencia no paramétrico

Cochrane propone una medida de permanencia que mide el tamaño de la caminata aleatoria de un proceso. La medida está determinada por la siguiente ecuación:

$$V_k = (\sigma_1^2)^{-1}(\text{Var}(y_t - y_{t-k}) / k) = (\sigma_k / \sigma_1)^2 \quad (11)$$

Donde σ_1^2 es la varianza de la primera diferencia del proceso, y σ_k^2 es $1/k$ veces la varianza de k diferencias del mismo.

Se analizarán los procesos puros (caminata aleatoria con *drift* y el proceso estacionario alrededor de la tendencia) para iniciar el estudio de esta medida. Si el proceso es una caminata aleatoria con *drift*, la medida de Cochrane será constante en todo su horizonte de tiempo, como se muestra a continuación:

- Si tenemos un proceso TS, simple:

$$y_t = \mu + bt + \varepsilon_t \quad (12)$$

Entonces tomando k diferencias:

$$(1-L^k) y_t = y_t - y_{t-k} \quad (13)$$

tomando la varianza de este proceso tenemos:

$$\text{Var}(y_t - y_{t-k}) = \text{Var}(y_t) + \text{Var}(y_{t-k}) + 2 \text{Cov}(y_t, y_{t-k}) \quad (14)$$

$$\text{Var}(y_t - y_{t-k}) = \text{Var}(\mu + bt + \varepsilon_t) + \text{Var}(\mu + b(t-k) + \varepsilon_{t-k}) + 2E((y_t - E(y_t))(y_{t-k} - E(y_{t-k}))) \quad (15)$$

$$\text{Var}(y_t - y_{t-k}) = \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\varepsilon^2 + 2E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-k}) = 2\sigma_\varepsilon^2 \quad (16)$$

por el contrario, si el proceso es una caminata aleatoria con *drift*:

$$y_t = \mu + y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (17)$$

cuya solución es:

$$y_t = y_0 + \mu t + \sum_{i=0}^t \varepsilon_i \quad (18)$$

entonces la varianza de k diferencias es:

$$\begin{aligned} \text{Var}(y_t - y_{t+k}) &= \text{Var}(y_t) + \text{Var}(y_{t+k}) + 2\text{Cov}(y_t, y_{t+k}) \\ &= \text{Var}(y_t) + \text{Var}(y_{t+k}) + E((y_t - E(y_t))(y_{t+k} - E(y_{t+k}))) \\ \text{Var}(y_t - y_{t+k}) &= \text{Var}\left[y_0 + \mu t + \sum_{i=0}^t \varepsilon_i\right] + \text{Var}\left[y_0 + \mu(t+k) + \sum_{i=0}^{t+k} \varepsilon_i\right] + E\left(\sum_{i=0}^t \varepsilon_i \left(-\sum_{i=0}^{t+k} \varepsilon_i\right)\right) \\ \text{Var}(y_t - y_{t+k}) &= t\sigma_\varepsilon^2 + (t+k)\sigma_\varepsilon^2 - 2(t+k)\sigma_\varepsilon^2 = t\sigma_\varepsilon^2 + t\sigma_\varepsilon^2 - k\sigma_\varepsilon^2 - 2t\sigma_\varepsilon^2 + 2k\sigma_\varepsilon^2 = k\sigma_\varepsilon^2 \end{aligned} \quad (19)$$

Así entonces la medida de Cochrane es

$$V_k = (\sigma_\varepsilon / \sigma_1)^2 = 1 \quad (20)$$

Mientras que en un proceso estacionario alrededor de la tendencia (TS), la medida de Cochrane será:

$$V_k = 2(k)^{-1}(\sigma_\varepsilon / \sigma_1)^2 = 1/k \quad (21)$$

La cual decrecerá rápidamente a cero. La medida de persistencia encontrará un rango de valores entre cero e infinito. Es claro el poco poder que tiene esta medida en el caso de un proceso estacionario alrededor de la tendencia, ya que el espacio de la medida en el largo plazo se limita a un único valor (cero), por lo tanto, los resultados cercanos a cero deben ser tomados con precaución (es importante resaltar que un proceso DS, con un tamaño pequeño de caminata aleatoria, es mejor representado por un proceso TS).

Basado en el hecho de que un proceso que contiene una raíz unitaria puede ser descompuesto en dos componentes: un componente permanente y un componente transitorio, o lo que es lo mismo, una caminata aleatoria y un componente estacionario, Cochrane utilizó los resultados de la descomposición de Beveridge y Nelson[9] y la de descomposiciones más generalizadas (en donde la correlación entre los componentes no está restringida a ser exacta), utilizadas en el trabajo de Watson, para hallar su medida de permanencia. La varianza del componente permanente (Z_t) está dada por:

$$\begin{aligned} \Delta y_t &= \Delta z_t + \Delta c_t \\ \text{Var}(\Delta z_t) &= \sigma_{\Delta z_t}^2 = |A(1)|^2 \sigma_\varepsilon^2 \end{aligned} \quad (22)$$

El componente permanente de y_t es llamado por Beveridge y Nelson la tendencia estocástica, y representa la caminata aleatoria del proceso. El anterior resultado es muy importante en el artículo de Cochrane, ya que encuentra una relación entre la varianza de la caminata aleatoria y la ganancia. Cochrane también determinó que la varianza de la caminata aleatoria está relacionada con la varianza de k diferencias. La relación será mostrada a continuación:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_k^2 = \sigma_{\Delta z t}^2 \quad (23)$$

Como podemos observar, son iguales en el horizonte infinito. El resultado anterior permite hallar la magnitud de la caminata aleatoria de cualquier proceso, siendo igual a la varianza de k diferencias en un horizonte infinito. Bajo este horizonte la medida de Cochrane es

$$V_k = \frac{(A(1))^2 \sigma_\epsilon^2}{\sigma_1^2} \quad (24)$$

igual a la ganancia ponderada sobre la varianza de la primera diferencia del proceso. El anterior resultado fue utilizado por Campbell y Mankiw para hallar una medida de permanencia basada en la ganancia. Para tal propósito definieron:

$$R^2 = 1 - \frac{\sigma_\epsilon^2}{\sigma_1^2} \quad (24)$$

Que es la fracción de la varianza que es predecible del comportamiento histórico del proceso. Así entonces:

$$A(1) = \sqrt{\frac{V_k}{1 - R^2}} \quad (26)$$

Esta medida es siempre mayor o igual a la medida de Cochrane, la que resulta ser un límite inferior de la ganancia. Campbell y Mankiw utilizan el estimador muestral ρ de R , que es el coeficiente de autocorrelación de orden 1 y está dado por:

$$\hat{\rho}_j = \left[\frac{T}{T-j} \right] \left[\frac{\sum_{t=j+1}^T (\Delta_y t \Delta_{t-j})}{\sum_{t=j+1}^T (\Delta_t)^2} \right] \quad (27)$$

El resultado de Cochrane determinado en el horizonte «infinito» será hallado empíricamente, en un momento k en que encuentre estabilidad su estimador, éste se degenerará en un momento posterior a k , en que la varianza de k diferencias no

represente el valor real del parámetro, debido a que la muestra restante va disminuyendo a medida que k aumenta y la varianza muestral tenderá por esto a cero. Los resultados de las dos medidas son mostrados en la siguiente tabla.

Como se observa, ambas medidas encuentran rápidamente estabilidad, que fluctúa entre 0.43 y 0.66.

Tabla 2
Estimación no paramétrica de la permanencia

| Medida de Cochrane | | | | | | | | | | | |
|--|---|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Período (1977 : 1 - 1997 : 4) | | | | | | | | | | | |
| Trimestre | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| V(k) | 1 | 0,6981 | 0,5542 | 0,3749 | 0,4320 | 0,4902 | 0,4454 | 0,4004 | 0,4003 | 0,4391 | 0,4227 |
| Ganancia no paramétrica dada por Campbell&Mankiw | | | | | | | | | | | |
| Período (1977:1 - 1998:4) | | | | | | | | | | | |
| Trimestre | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| A(k) | 1 | 0,8370 | 0,7457 | 0,6133 | 0,6584 | 0,7014 | 0,6685 | 0,6339 | 0,6338 | 0,6638 | 0,6513 |

3.2. Análisis de permanencia paramétrico

Se utilizaron modelos ARIMA para representar el nivel del logaritmo natural del PIB trimestral ajustado estacionalmente. La metodología de Campbell y Mankiw propone que el orden p y q , de los polinomios $\phi(L)$ y $\theta(L)$, respectivamente, no sea superior a 3.

Una mala especificación estadística resulta cuando se diferencia un proceso TS, debido a que se produce una raíz unitaria en el polinomio MA (un proceso no invertible). La **robustez** de la metodología permite inferir la existencia o no de esta mala especificación. Para probar la anterior aseveración se muestra el siguiente desarrollo:

$$\phi(L)y_t = \mu + bt + \varepsilon_t \quad (28)$$

tomando una diferencia a cada lado

$$\begin{aligned} \phi(L)(1-L)y_t &= (1-L)(\mu + bt + \varepsilon_t) \\ \phi(L)(1-L)y_t &= \mu - \mu + bt - b(t-1) + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1} \\ \phi(L)\Delta y_t - b + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1} - b + (1-L)\varepsilon_t & \end{aligned} \quad (29)$$

Las raíces de los polinomios estimados en la serie y que muestra la siguiente tabla no presentan mala especificación, salvo en el caso del ARIMA (3,2), que tiene una

parametrización redundante; en las demás parametrizaciones la raíz unitaria del polinomio AR se cancela con la del polinomio MA:

Tabla 3
Raíces de los procesos ARIMA propuestos para modelar el PIB

| Raíces de modelos estimados del $\Delta \ln \text{PIB}_t$ | | | | |
|---|-----------|------------|--------------------------------|--|
| Parametrización | Raíces AR | | Raíces MA | |
| 0,1 | | | -.05 | |
| 0,2 | | | -.02+.31i -.02 -.31i | |
| 0,3 | | | .51+.71i .51+.71i -.68 | |
| 1,0 | .06 | | | |
| 1,1 | -.76 | | -.79 | |
| 1,2 | -.65 | | -.40 -.26i -.40+.26i | |
| 1,3 | -.56 | | .17 -.45 -.44i .45+.44i | |
| 2,0 | .47 | -.37 | | |
| 2,1 | 1.00 | -.22 | .97 | |
| 2,2 | 1.00 | -.70 | .98 -.59 | |
| 2,3 | .96 | -.76 | .72 -.26i .72+.26i -.87 | |
| 3,0 | .62 | -.27 -.26i | -27+.26i | |
| 3,1 | 1.00 | -.14+.39i | -.14 .39i | |
| 3,2 | 1.00 | -.30 | -.89 | |
| 3,3 | .93 | .46 | -.67 | |
| | | | -.88 -.32i .88+.32i -.70 | |

Las funciones de respuesta impulso permiten medir la permanencia de una innovación. La definición surge intuitivamente como la diferencia de dos realizaciones diferentes de y_{t+n} , que son iguales hasta un tiempo t , una de las realizaciones sirve como referencia, mientras la otra es afectada por la historia (los choques históricos son las innovaciones de la serie independiente de la representación general de un proceso) y es golpeada por un choque. La definición de respuesta impulso se muestra a continuación:

$$I_Y(k, \delta, \omega_{t-1}, \dots, \omega_{t-m}) = E[y_{t+n} / \varepsilon_t = \delta, \dots, \varepsilon_{t+n} = 0, \omega_{t-1}, \dots, \omega_{t-m}] - E[y_{t+n} / \varepsilon_t = 0, \dots, \varepsilon_{t+n} = 0] \quad (30)$$

Donde k representa el período de pronóstico, δ la innovación y ω_{t-i} los choques históricos. Una representación general del proceso y_t es expresada mediante la siguiente ecuación:

$$y_t = \phi(L)y_t + \Omega_1(L)z_{1t} + \dots + \Omega_f(L)z_{ft} + \theta_q \varepsilon_t \quad (31)$$

Donde ϕ , Ω_i y θ corresponden a los polinomios que rigen la parte autoregresiva, las variables independientes y los residuos, respectivamente. (La anterior representación puede incluir o no **feedback**; si lo incluye, el modelo es multivariado, si no,

puede ser múltiple o univariado). Si no contiene variables independientes, la representación general del proceso y_t puede ser aproximada por modelos ARIMA. La función de respuesta impulso para el proceso ARIMA estacionario es:

$$I_Y(k, \delta) = \left[\sum_{j=0}^{k-1} \pi_j \right] \delta \quad (32)$$

Si el tamaño del choque aumenta o disminuye en un múltiplo o submúltiplo cualquiera, la función de respuesta impulso experimentará este mismo cambio (propiedad de linealidad). Si la polaridad del choque cambia, la función de respuesta impulso será exactamente opuesta a la respuesta impulso original (propiedad de simetría). Como los modelos ARIMA son univariados (por lo tanto no contienen polinomios Ω_i), no son afectados en ninguna forma por las innovaciones históricas (ω_{t-i}); a esta propiedad se le llama independencia en la historia. Este tipo de función de respuesta impulso es llamada lineal. Una medida de permanencia llamada ganancia, que la estima en un horizonte infinito, puede ser hallada de la siguiente manera:

$$A(1) = \frac{\theta(1)}{\varphi(1)} \quad (33)$$

A continuación se muestran las respuestas impulso de los diferentes modelos cuando la serie es afectada por una innovación unitaria positiva. Los períodos de chequeo son tomados según el estudio original.

Las permanencias junto con la ganancia observadas a continuación muestran permanencias más parecidas a una caminata aleatoria que a un proceso de tendencia estacionaria:

Tabla 4
Estimación paramétrica de la permanencia

| Respuestas impulso k trimestres adelante | | | | | | | | | |
|--|---|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Orden(p,q) | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 20 | 40 | 80 | A(1) |
| 0,1 | 1 | 1,04745 | 1,04745 | 1,04745 | 1,04745 | 1,04745 | 1,04745 | 1,04745 | 1,04745 |
| 0,2 | 1 | 1,045763 | 1,14247 | 1,14247 | 1,14247 | 1,14247 | 1,14247 | 1,14247 | 1,14247 |
| 0,3 | 1 | 0,648094 | 1,238893 | 1,238893 | 1,238893 | 1,238893 | 1,238893 | 1,238893 | 1,238893 |
| 1,0 | 1 | 1,059029 | 1,0625134 | 1,0627191 | 1,0627313 | 1,0627320 | 1,0627320 | 1,0627320 | 1,0627320 |
| 1,1 | 1 | 1,027798 | 1,0227734 | 1,0181429 | 1,0160396 | 1,0158589 | 1,0157665 | 1,0157661 | 1,0157661 |
| 1,2 | 1 | 1,15174 | 1,19733 | 1,22500 | 1,23092 | 1,23108 | 1,23112 | 1,23112 | 1,2311206 |
| 1,3 | 1 | 1,1615180 | 1,1592322 | 1,2074396 | 1,2127826 | 1,2128318 | 1,2128373 | 1,2128373 | 1,2128373 |
| 2,0 | 1 | 1,1040210 | 1,3285267 | 1,3859708 | 1,3888335 | 1,3888403 | 1,3888407 | 1,3888407 | 1,3888407 |
| 2,1 | 1 | 0,806858 | 0,8826508 | 0,9631295 | 1,1187267 | 1,1956416 | 1,5715747 | 2,2819405 | 11,284972 |
| 2,2 | 1 | 0,9114370 | 0,9646831 | 1,0422202 | 1,1675490 | 1,2268365 | 1,5099053 | 2,0183880 | 5,3068705 |

continuación...

| | | | | | | | | | |
|-----|---|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 2,3 | 1 | 0,6133500 | 0,8265084 | 1,2273663 | 1,8753158 | 2,1246665 | 2,8823046 | 3,3153344 | 3,4011041 |
| 3,0 | 1 | 1,0678590 | 1,3812721 | 1,5147074 | 1,5380278 | 1,5384459 | 1,5385160 | 1,5385160 | 1,5385160 |
| 3,1 | 1 | 0,751824 | 0,7674159 | 0,8307999 | 0,9758154 | 1,0479668 | 1,4019777 | 2,0773917 | 12,458829 |
| 3,2 | 1 | 0,833064 | 0,9370546 | 1,0157954 | 1,1799187 | 1,2671110 | 1,7145952 | 2,5912835 | 20,211622 |
| 3,3 | 1 | 0,667503 | 0,6622434 | 1,2128354 | 2,0692945 | 2,3447998 | 2,9690574 | 3,1479640 | 3,1581896 |

Los modelos mejor especificados por los criterios de Akike y Schwarz muestran un valor de permanencia cercanos a la unidad. Lo que coincide más con un comportamiento de una caminata aleatoria.

4. Análisis de permanencia ante choques recesivos y expansionarios

La representación general de un proceso puede ser simulada por un modelo de función de transferencia. El caso bivariado tiene la siguiente representación:

$$y_t = \mu + \phi(L) y_{t-1} + \Omega(L) z_{t-1} + \theta(L) \varepsilon_t \quad (34)$$

Donde y_t es la variable endógena y z_t es la variable exógena (existe causalidad de z_t a y_t , pero no viceversa, porque representaría un «feedback» entre las variables, que no es permitido en estos modelos. (En casos de existencia de *feedback*, se utilizan modelos VARMA, los cuales son extensiones multivariadas de los modelos ARMA). El polinomio $\Omega(L)$ es llamado la función de transferencia, ya que este polinomio permite modelar la relación de causalidad de la variable independiente sobre la dependiente. Al igual que en los modelos ARIMA, el polinomio $\phi(L)$ determina la estacionariedad del proceso; también es necesario que las series sean estacionarias para poder ser tratadas. Dicha metodología recomienda diferenciación en caso de no estacionariedad en la media, para cualquiera de las series.

Si se quiere conocer los efectos de los choques de z_t sobre y_t , se hace uso de la función de respuesta impulso, que está definida por los polinomios de orden infinito $\Omega(L)/(1-\phi(L))$ y $\theta(L)/(1-\phi(L))$. La función de respuesta impulso no lineal con m períodos históricos es:

$$I(k, \delta, \omega_{t-1}, \dots, \omega_{t-m}) = \left[\sum_{i=0}^{n-1} \pi_i \right] \omega_{t-1} + \dots + \left[\sum_{i=0}^{n+m-2} \pi_i \right] \omega_{t-m} + \left[\sum_{i=0}^{n-1} \psi_i \right] \delta \quad (35)$$

Esta función de respuesta impulso no tiene las propiedades del caso lineal, por lo cual permite posibles asimetrías, producto de las posibles combinaciones entre el tamaño, polaridad de los choques y la historia.

Utilizando el procedimiento propuesto por Beaudry y Koop, se emplea como variable explicativa de las funciones de transferencia la profundidad, definida como:

$$\text{Prof}_t = \max\{Y_{t-j}\}_{j=0} - Y_t \quad (36)$$

La profundidad se comporta como ruido blanco. Esto permite modelar la serie del logaritmo natural del PIB colombiano con una función de transferencia, ya que no existe *feedback* entre la serie independiente y la serie explicativa. El modelo de función de transferencia empleado es:

$$\phi(L)\Delta y_t = \mu + \Omega(L)\text{Prof}_{t-1} + \theta(L)\varepsilon_t \quad (37)$$

Donde el polinomio $\phi(L)$ es de orden p , el polinomio $\theta(L)$ de orden q y el polinomio $\Omega(L)$ de orden r . Siguiendo la metodología utilizada por Beaudry y Koop (la cual está basada en la parametrización de Cambell y Mankiw) se estimaron los modelos de parametrización (p,q,r) , donde el orden de cada polinomio no puede ser mayor que tres y su suma no puede exceder 6. El número de modelos obtenidos según la anterior metodología es 56. Debido al número de modelos estimados, se analizan sólo las mejores funciones de respuesta impulso, considerando la metodología de Box y Jenkins según su orden. Se destaca el buen comportamiento de los modelos seleccionados, los coeficientes son estadísticamente significativos a cualquier nivel de confianza y los residuos son ruido blanco, a excepción de la función de transferencia $(1,0,0)$.

Como la duración de las recesiones se encuentran entre 1 y 3 trimestres, se plantean 3 escenarios que incluyen el mismo número de choques históricos. Los choques históricos de interés son aquellos relacionados con las recesiones de la serie. El primer choque histórico se calcula promediando los primeros valores de la profundidad correspondiente a los primeros trimestres de las recesiones; el segundo choque histórico se calcula promediando los segundos valores de la profundidad que corresponden a los segundos trimestres de las recesiones; el tercer choque es calculado en forma similar.

Se estiman funciones de transferencia con choques unitarios positivos (expansionarios) y negativos (recesionarios), para analizar sus diferencias. Las permanencias de choques recesionarios y expansionarios medidas por funciones de respuesta impulso no lineales a los mejores modelos según el rango, se muestran a continuación:

Tabla 5

Estimaciones de permanencia en funciones de respuesta impulso no lineales

| Respuestas impulso para los modelos preferidos | | | | | | | | | | | | |
|--|---------|--------|---------|--------|---------|--------|---------|--------|---------|--------|---------|--------|
| Modelo | 0,0,1 | | 0,1,1 | | 0,2,1 | | 0,2,2 | | 2,1,2 | | 0,3,3 | |
| Trimestre | - | + | - | + | - | + | - | + | - | + | - | + |
| 1 | -0,7359 | 0,7359 | -0,9636 | 1,0364 | -0,9636 | 1,0364 | -0,9674 | 1,0326 | -0,9817 | 1,0183 | -0,9693 | 1,0307 |
| 2 | -0,7872 | 0,7872 | -0,9737 | 1,0465 | -0,9507 | 1,0235 | -0,9709 | 1,0337 | -0,4703 | 0,4955 | -1,0915 | 1,1533 |
| 4 | -0,7872 | 0,7872 | -0,9737 | 1,0465 | -0,8801 | 0,9529 | -0,8865 | 0,9494 | -0,3870 | 0,4149 | -0,7478 | 0,8114 |
| 8 | -0,7910 | 0,7910 | -0,9737 | 1,0465 | -0,8801 | 0,9529 | -0,8865 | 0,9494 | -0,3987 | 0,4262 | -0,7478 | 0,8114 |
| 16 | -0,7911 | 0,7911 | -0,9737 | 1,0465 | -0,8801 | 0,9529 | -0,8865 | 0,9494 | -0,3990 | 0,4265 | -0,7478 | 0,8114 |
| 20 | -0,7911 | 0,7911 | -0,9737 | 1,0465 | -0,8801 | 0,9529 | -0,8865 | 0,9494 | -0,3990 | 0,4265 | -0,7478 | 0,8114 |
| 40 | -0,7911 | 0,7911 | -0,9737 | 1,0465 | -0,8801 | 0,9529 | -0,8865 | 0,9494 | -0,3990 | 0,4265 | -0,7478 | 0,8114 |
| 80 | -0,7911 | 0,7911 | -0,9737 | 1,0465 | -0,8801 | 0,9529 | -0,8865 | 0,9494 | -0,3990 | 0,4265 | -0,7478 | 0,8114 |

La historia se limita al primero, segundo y tercer período promedio histórico de la profundidad en recesión, la historia es igual para cada modelo.

| Respuesta impulso para el modelo preferido por AIC | | | | | | |
|--|-----------|--------|---------------|--------|------------------|--------|
| MODELO (0,2,1) | | | | | | |
| Trimestre | 1 período | | 1 y 2 período | | 1,2 y 3 períodos | |
| | - | + | - | + | - | + |
| 1 | -0,9718 | 1,0282 | -0,9436 | 1,0564 | -0,9153 | 1,0847 |
| 2 | -0,9589 | 1,0153 | -0,9306 | 1,0435 | -0,9024 | 1,0718 |
| 4 | -0,8883 | 0,9447 | -0,8601 | 0,9730 | -0,8318 | 1,0012 |
| 8 | -0,8883 | 0,9447 | -0,8601 | 0,9730 | -0,8318 | 1,0012 |
| 16 | -0,8883 | 0,9447 | -0,8601 | 0,9730 | -0,8318 | 1,0012 |
| 20 | -0,8883 | 0,9447 | -0,8601 | 0,9730 | -0,8318 | 1,0012 |
| 40 | -0,8883 | 0,9447 | -0,8601 | 0,9730 | -0,8318 | 1,0012 |
| 80 | -0,8883 | 0,9447 | -0,8601 | 0,9730 | -0,8318 | 1,0012 |

Estas respuestas impulsos se hallaron aplicando un choque histórico de 0,03577%, que correspondió a la mayor recesión encontrada durante el período 1977:1- 1997:4 de la serie (-0,30797975% trimestral, en el logaritmo natural del PIB trimestral). Choques del anterior valor de la profundidad son aplicados en el 1, 2 y 3 períodos.

| Respuesta impulso para el modelo preferido por AIC | | | | | | | | |
|--|-----------|--------|--------------|--------|----------------|--------|--------------------|--------|
| MODELO (0,1,2) | | | | | | | | |
| Trimestre | 1 período | | 1,2 períodos | | 1,2,3 períodos | | 1,2,3 y 4 períodos | |
| | - | + | - | + | - | + | - | + |
| 1 | -0,8849 | 1,0316 | -0,9369 | 1,0631 | -0,9053 | 1,0947 | -0,8738 | 1,1262 |
| 2 | -0,8849 | 1,0187 | -0,9240 | 1,0502 | -0,8924 | 1,0818 | -0,8608 | 1,1133 |
| 4 | -0,8849 | 0,9481 | -0,8534 | 0,9796 | -0,8218 | 1,0112 | -0,7903 | 1,0428 |
| 8 | -0,8849 | 0,9481 | -0,8534 | 0,9796 | -0,8218 | 1,0112 | -0,7903 | 1,0428 |
| 16 | -0,8849 | 0,9481 | -0,8534 | 0,9796 | -0,8218 | 1,0112 | -0,7903 | 1,0428 |
| 20 | -0,8849 | 0,9481 | -0,8534 | 0,9796 | -0,8218 | 1,0112 | -0,7903 | 1,0428 |
| 40 | -0,8849 | 0,9481 | -0,8534 | 0,9796 | -0,8218 | 1,0112 | -0,7903 | 1,0428 |
| 80 | -0,8849 | 0,9481 | -0,8534 | 0,9796 | -0,8218 | 1,0112 | -0,7903 | 1,0428 |

Estas respuestas impulsos se hallaron aplicando un choque en la profundidad (histórico) de 0,04 que representa aproximadamente la mayor recesión encontrada (-7.56% trimestral del PIB) durante el período 1977:1- 1999:2 de la serie. Choques del anterior valor de la profundidad son aplicados en el 1, 2, 3 y 4 períodos.

CONCLUSIONES

Se encontró que la serie se asemeja más a un proceso de diferencia estacionaria (DS) que a un proceso de tendencia estacionaria (TS). Los resultados mostraron también permanencia a largo plazo ante choques recesivos. El comportamiento del PIB trimestral colombiano parece ser mejor explicado por teorías asociadas al equilibrio múltiple.

Existe asimetría en la permanencia. Los choques positivos (expansionarios) muestran un comportamiento altamente permanente, incluso por encima del 100% del choque inicial. La permanencia con choques negativos (recesivos) muestra un comportamiento permanente inferior al 100%. La asimetría se acentúa cuando más choques históricos y de mayor tamaño golpean el sistema; en el caso más extremo simulado encontramos diferencias en valor absoluto ante los dos tipos de choques del 25%.

Las funciones de respuesta impulso no lineales expansivas mostraron un comportamiento de permanencia similar al de los análisis previos (capítulo 3) al encontrar permanencia entre el 40% (el resultado de la respuesta impulso del modelo (2,2,1) concuerda con la medida de Cochrane, y se estima una permanencia aproximada del 40%) y el 104% del choque (el resto de funciones de transferencia, los mejores modelos ARIMA y la medida de ganancia no paramétrica coinciden en una medida de permanencia entre el 65 y el 104%).

Los choques recesivos son permanentes, y se ubican entre el y el 98% de la innovación.

Referencias

- [1] NELSON, C.R. & PLOSSER, C.I. (1981). Trends and random walks in macroeconomics time series: some evidence and implications. *Journal of Monetary Economics* 10:139-162.
- [2] WATSON, M.W. (1986). Univariate Detrending Methods with Stochastic Trends. *Journal of Monetary Economics*, XVIII. 49-75.
- [3] CAMPBELL, J. H. & MANKIW, N.G. (1987). Are Output Fluctuations Transitory? *Quarterly Journal of Economics* 102: 857-880.
- [4] COCHRANE, J.B. (1988). How big is a random walk in GNP? *Journal of Political Economy* 96: 893-920.
- [5] GAVIRIA, A. & URIBE, J.D. (1994). Choques exógenos y cambios estructurales. Colombia: 1936-1991. *Universitas Económica*, Vol. IX, N° 1.
- [6] BEAUDRY, P. & KOOP, G. (1993). Do recession permanently change output. *Journal of Monetary Economics* 31.
- [7] ROMER. *Advanced Macroeconomics*. Capítulo 5.
- [8] DICKEY, D.A. & FULLER, W.A. (1979). Distribution of Estimators for Autoregressive Time Series whit a Unit Root. *Journal of American Statistical Association*, Vol. 74.

- [9] BEVERIDGE, S. & Nelson, C., R.A. (March 1981). New Approach to Decomposition of Economic Time Series into permanent and Transitory Components with Particular Attention to Measurement of the Business Cycle. *Journal of Monetary Economics* 7: 151-174.