

Comparación de soluciones analíticas y numéricas de un problema termoelástico

Bleidys Blaschke Collado*, Carlos Flórez Taibel**,
Alejandro Pacheco Sanjuán***

Grupo de Investigación en Materiales y Procesos GIMYP
Departamento de Ingeniería Mecánica, Universidad del Norte, Barranquilla (Colombia)

Resumen

El objetivo de este trabajo es comparar diferentes esquemas de solución Analítica y Numérica para problemas en Teoría de elasticidad lineal. Los procedimientos numéricos comparados son el de "Método de elementos finitos" y el "Método de Rayleigh-Ritz". Aunque los dos parten de la solución aproximada de un mismo problema variacional, difieren en la forma en que las variables de estado son aproximadas, en este caso el campo de desplazamientos. Con el propósito de comparar resultados se desarrolla el estudio del estado de esfuerzo y deformación de un eje con sección transversal variable, conductividad térmica no uniforme y que se encuentra empotrado en sus extremos. El estado de esfuerzo se genera debido a una diferencia de temperaturas entre sus extremos y una carga puntual en una posición intermedia. Se plantean las ecuaciones fundamentales y se obtiene la solución analítica. Posteriormente se resuelve el problema variacional equivalente y se expresa el campo de desplazamiento en series de senos y cosenos.

Debido a la discontinuidad en el campo de desplazamientos, consecuencia de la carga puntual, la solución obtenida tiende a la solución analítica a medida que se aumenta el número de términos de la serie, pero es de anotar que la evaluación de las integrales para la obtención de dicha solución requiere de un esfuerzo mucho mayor al ser funciones que son válidas en todo el dominio. Se puede observar cómo el método de los elementos finitos saca ventaja de funciones sencillas con un soporte compacto para la descripción de las variables incógnitas y de cómo se llega a una mejor concordancia con los resultados analíticos evitando las oscilaciones de la solución, característica propia de las series de senos y cosenos.

Palabras claves: Conducción de calor, deformaciones, desplazamientos, elementos finitos, esfuerzos térmicos, método de energía, Rayleigh-Ritz.

Fecha de recepción: 8 de abril de 2005
Fecha de aceptación: 7 de junio de 2005

*Ingeniera mecánica, Universidad del Norte; candidata a Magíster en Ingeniería Mecánica, Universidad del Norte. Profesora del Departamento de Ingeniería Mecánica de la misma universidad. blaschke@uinorte.edu.co

**Ingeniero mecánico, Universidad del Norte; candidato a Magíster en Ingeniería Mecánica, Universidad del Norte. Profesor del Departamento de Ingeniería Mecánica de la misma universidad. Dirección postal: A.A. 1569, Barranquilla (Colombia). cflorez@uinorte.edu.co

***Ingeniero mecánico, Universidad de los Andes; Magíster en Ingeniería Mecánica, Universidad de los Andes. Profesor del Departamento de Ingeniería Mecánica de la Universidad del Norte. Dirección postal: A.A. 1569, Barranquilla (Colombia). apacheco@uinorte.edu.co

Abstract

The present writing is headed to the comparison of different schemes from Analytical and Numerical solution for problems in the Theory of Linear Elasticity. Numerical procedures to compare are the "finite element method" and the Rayleigh-Ritz method. Although both start from the approximated solution of a same variational problem, they differ in the form in which the state variables are approximated, in this case the displacement field. With the objective to compare results, a study of the strength and deformation state is developed in an Shaft with variable cross-sectional area, not uniform thermal conductivity and fixed ends. The stress state is generated due to a temperature difference between its ends and a point load in an intermediate position. The fundamental equations are considered and the analytical solution is obtained. Afterwards, the equivalent variational problem is solved and the field of displacements is expressed in terms of sines and cosines.

Due to the displacement field discontinuity, which is consequence of the punctual load, the obtained solution tends to the analytical solution as the number of terms of the series increases, but it is important to say that the evaluation of the integrals for obtaining this solution requires a greater effort since functions are valid in the entire domain. It can be observed how the finite element method takes advantage of simple functions with a compact support for the description of the unknown variables. Also it is noticed how to get to a better concordance with the analytical results avoiding the oscillations of the solution, proper to sine and cosine series.

Key words: Heat transfer conduction, strain, displacements, finite elements method, thermal strength, energy methods, Rayleigh-Ritz method.

1. INTRODUCCIÓN

En un eje de sección transversal circular variable, empotrado en sus extremos a diferentes temperaturas y con una fuerza aplicada a una distancia determinada sobre su eje longitudinal, se inducen esfuerzos debido a las cargas y a los gradientes de temperatura que pueden ser analizados mediante las ecuaciones fundamentales de la Mecánica de medios continuos y la Teoría de la elasticidad. Se plantea la solución al problema utilizando tres métodos: analítico, aproximaciones por el método de energía de Rayleigh-Ritz y elementos finitos, utilizando Matlab como principal herramienta informática para la solución de operaciones de cálculo y sistemas de ecuaciones obtenidos, y ANSYS para la solución del problema por elementos finitos.

El análisis del problema, desarrollado por cada uno de los métodos antes mencionados, determina que el método de energía, siendo mucho más elaborado en su desarrollo, es el que más se aproxima a la solución analítica; sin embargo, el método por elementos finitos brinda una excelente aproximación.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En el ejercicio de la ingeniería se encuentran múltiples problemas del campo de la elasticidad que requieren de la combinación de conceptos de diversas áreas en búsqueda de una solución común que satisfaga las condiciones bajo las cuales se encuentran actuando dichos componentes.

En el problema que se plantea a continuación no sólo se presentan deformaciones por efecto de la carga sino también las producidas por el gradiente de temperatura, lo que conduce al empleo de las ecuaciones de la Elasticidad y de la Transferencia de calor por conducción.

Así pues, considere el eje macizo de sección transversal circular A mostrado en la figura 1, que se encuentra empotrado en sus extremos; la temperatura del lado izquierdo se mantiene constante y es de 70°C , mientras que en el derecho es de 180°C . La temperatura del eje cuando fue empotrado era de 22°C . El material del eje tiene una conductividad térmica variable $k(x)$ y mecánicamente se comporta como un material elástico lineal con un módulo de elasticidad E , un módulo de Poisson ν y un coeficiente de expansión térmica α . De igual manera se ejerce sobre éste una carga P de 60 kN a una distancia de $2L/3$, medida desde el empotramiento izquierdo. Teniendo en cuenta la geometría y la información suministrada, se desea determinar el campo de desplazamiento resultante y el nivel de esfuerzo axial en el eje como función de x , con el fin de encontrar la sección crítica.

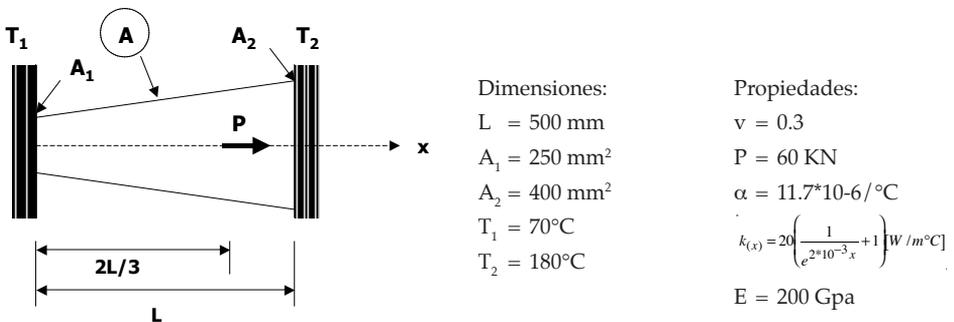


Figura 1. Eje de sección variable empotrado en los extremos

El procedimiento para resolver este problema inicia con el análisis del problema de la Transferencia de Calor, posteriormente se determinan las reacciones producidas por la carga, y finalmente, los desplazamientos y esfuerzos que se presentan sobre el cuerpo analizado.

El sistema en estudio permite obtener una solución analítica del problema; sin embargo, esto no siempre es posible, por lo cual se recurre al uso de métodos alternativos para encontrar soluciones aproximadas. En esta investigación se emplean Rayleigh-Ritz y el de elementos finitos como métodos alternativos para ser comparados con la solución analítica obtenida.

Una importante aplicación del sistema en estudio se encuentra en tuberías con extremos fijos, cuyas condiciones de presión y temperatura hacen que estos elementos se vean sometidos a distintos niveles de esfuerzos; por lo cual se debe proceder al diseño de aliviadores (secciones en U) capaces de deformarse controladamente, lo cual evita que ésta falle por pandeo.

3. SOLUCIÓN DEL PROBLEMA TÉRMICO

Determinación de la Distribución de Temperatura

Debido a los cambios de temperatura que sufre el eje se presenta un flujo de calor del punto de mayor temperatura al de menor temperatura, lo cual genera una transferencia de calor por conducción.

El problema de conducción en el eje se trabaja unidimensionalmente, dado que la mayor relación radio/longitud es muy pequeña (del orden 0.02256); por tal motivo se puede centrar la solución en conocer la distribución de la temperatura a lo largo de la longitud del eje. Por ello, expresará el radio, r , variable en este caso, en términos de x .

Realizando el balance de energía se tiene que

$$E_{entra} + \overset{0}{E}_{produce} = E_{sale} + \overset{0}{E}_{acumula\ o\ desacumula}$$

Dado que no se produce ni se acumula energía:

$$E_{entra} = E_{sale} \quad (\text{Ec. 1})$$

Tomando un elemento diferencial para el calor, como se muestra en las figuras 2 y 3, y aplicando (Ec. 1) se obtiene que

$$q'' A_x = q'' A_{x+\Delta x}$$

Donde $q'' = -k(x) \frac{dT}{dx}$

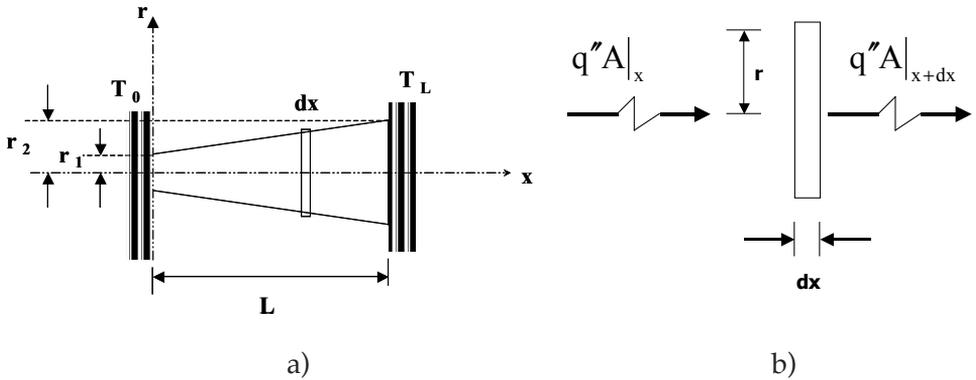


Figura 2. a) Diagrama del eje en el sistema coordenado (r, x) para facilitar el estudio. b) Elemento diferencial de calor

Aplicando límite de ambos lados, y de acuerdo con la ley de Fourier para la transferencia de calor, se tiene que

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{q''A_{x+\Delta x} - q''A_x}{\Delta x} = \frac{d(q''A)}{dx} = 0$$

Entonces

$$\frac{d}{dx} \left(-k(x) \frac{dT}{dx} A(x) \right) = 0 \quad (\text{Ec. 2})$$

Debe recordarse que

$$k(x) = 20(e^{-2 \cdot 10^{-3}x} + 1)$$

$$k(x) = \phi(e^{-\lambda x} + 1) \quad \longrightarrow \quad \frac{dk(x)}{dx} = -\phi \lambda e^{-\lambda x}$$

Como $A = \partial r^2$ donde $r = r_1 + \left(\frac{r_2 - r_1}{L}\right)x$

$$A_{(x)} = \partial \left(r_1 + \left(\frac{r_2 - r_1}{L}\right)x \right)^2$$

$$A_{(x)} = \partial(a + bx)^2 \rightarrow \frac{dA_{(x)}}{dx} = 2\partial b(a + bx)$$

Reemplazando lo anterior en (Ec. 2) y resolviendo esta ecuación diferencial se llega a que la temperatura a lo largo del eje viene dada por

$$T_{(x)} = \frac{T_F - T_0}{\left(\int_0^L \frac{1}{(a + bx)^2 (e^{-\lambda x} + 1)} dx \right)} \left(\int_0^x \frac{1}{(a + bx)^2 (e^{-\lambda x} + 1)} dx \right) + T_0$$

En la figura 3 se muestra la distribución de la conductividad térmica. Se logra apreciar que disminuye exponencialmente en la medida que se aumenta la longitud del eje desde 40 a 27.3576 W/m°C. Por otro lado, en la figura 4 se indica la distribución de temperatura.

La figura 4 muestra el comportamiento lineal de la temperatura, así que una excelente aproximación de esta tiene la siguiente forma:

$$T_{(x)} = T_0 + \left(\frac{T_L - T_0}{L} \right) x \quad (\text{Ec. 3})$$

$$T_{(x)} = s + rx$$

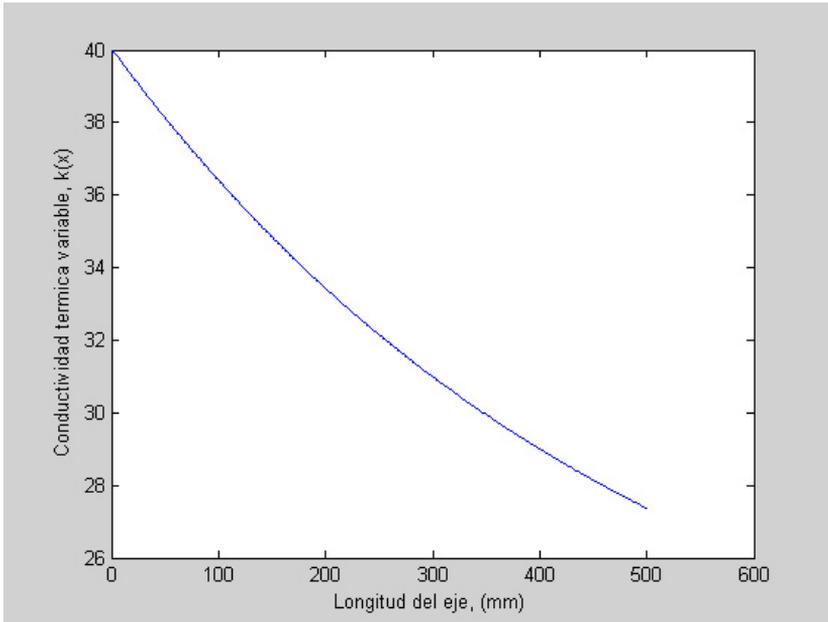


Figura 3. Gráfica de Conductividad Térmica a lo largo del eje

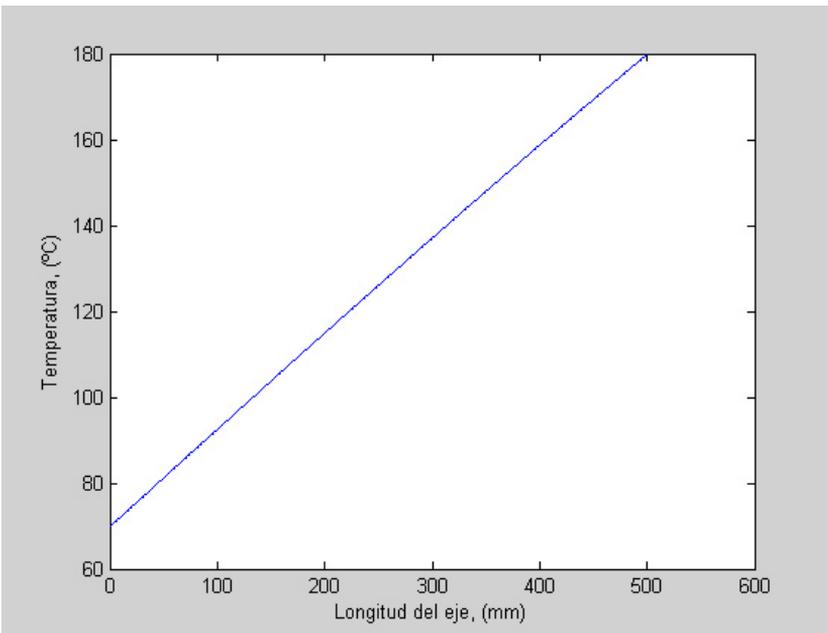


Figura 4. Gráfica de Distribución de Temperatura a lo largo del eje

4. SOLUCIÓN ANALÍTICA DEL PROBLEMA ELÁSTICO

Para abordar el problema es necesario tener claro que el campo de desplazamiento resultante y el nivel de esfuerzo axial son inducidos debido al cambio de temperatura que se presenta en el eje, desde los 22°C iniciales hasta los 180°C que tiene el marco, y la carga de 60KN que se aplica. La deformación unitaria total en el eje viene dada por

$$\epsilon_{Total} = \epsilon_{Térmica} + \epsilon_P \quad (\text{Ec. 4})$$

En la figura 5 se muestra el diagrama del eje, para facilitar el estudio de los esfuerzos y deformaciones inducidos.

La deformación unitaria a lo largo del eje axial también se puede expresar como

$$\epsilon = \frac{du_x}{dx} \quad (\text{Ec. 5})$$

donde u_x es el desplazamiento en el eje x .

Las deformaciones térmicas unitarias son:

$$\epsilon_{Térmica} = \alpha \Delta T_{(x)} \quad (\text{Ec. 6})$$

donde $\Delta T_{(x)} = (T_{(x)} - T_i)$

Reemplazando (Ec. 5) y (Ec. 6) en (Ec. 4), para la deformación unitaria debida a la carga, se obtiene que

$$\epsilon_P = \frac{du_x}{dx} - \alpha \Delta T_{(x)} \quad (\text{Ec. 7})$$

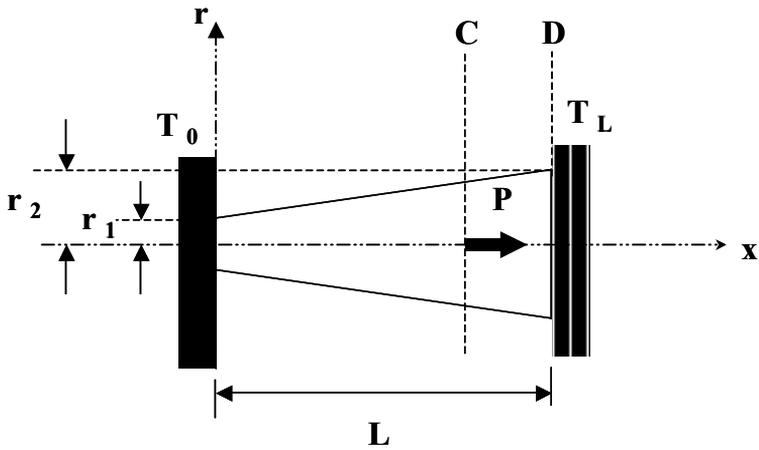


Figura 5. Diagrama del eje en estudio

Tomando un elemento diferencial en el eje (figura 6) para buscar una relación para los desplazamientos:

$$\sum F_x = 0 : \sigma_{x+\Delta x} A_{x+\Delta x} - \sigma_x A_x = 0$$

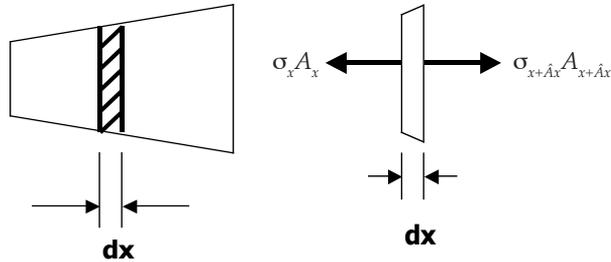


Figura 6. Diagrama de cuerpo libre de un elemento diferencial en el eje

Dividiendo cada término por \$\Delta x\$ y aplicando el límite cuando \$\Delta x\$ tiende a cero, se llega a que

$$\frac{d}{dx}(\sigma_x A(x)) = 0 \quad (\text{Ec. 8})$$

Teniendo en cuenta que

$$\sigma_x = E \varepsilon_p \quad (\text{Ec. 9})$$

Reemplazando (Ec. 9) en (Ec. 8) se obtiene

$$\frac{d}{dx} \left(E \varepsilon_p * \pi (a + bx)^2 \right) = 0 \quad (\text{Ec. 10})$$

Entonces

$$E \varepsilon_p * \pi (a + bx)^2 = k \quad (\text{Ec. 10a})$$

Reemplazando (Ec. 7) en la ecuación anterior y reorganizando la expresión

$$E \left(\frac{du_x}{dx} - \alpha \Delta T_{(x)} \right) = \frac{k}{\pi (a + bx)^2} \quad (\text{Ec. 11})$$

Aquí se están igualando esfuerzos, de forma que se puede conocer el valor de k analizando los tramos ubicados antes y después de la carga.

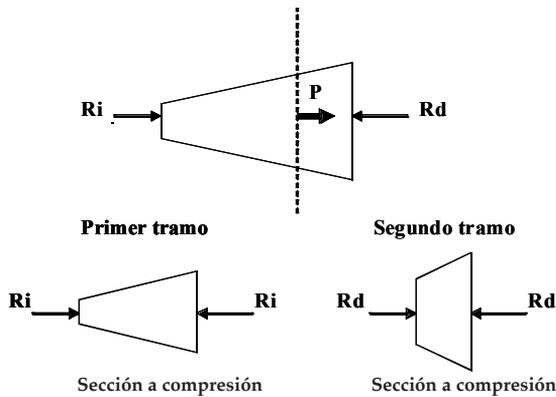


Figura 7. Diagrama de cuerpo libre del eje para el cálculo de las reacciones

La sumatoria de fuerzas en el eje establece que

$$R_i + P = R_d \quad (\text{Ec. 12})$$

Para el primer tramo (sección a compresión) $0 \leq x \leq c$, donde $c = \frac{2L}{3}$

$$E \left(\frac{du_x}{dx} - \alpha \Delta T_{(x)} \right) = \frac{-Ri}{\pi(a+bx)^2} \quad (\text{Ec. 13})$$

Para el segundo tramo (sección a compresión) $c \leq x \leq L$:

$$E \left(\frac{du_x}{dx} - \alpha \Delta T_{(x)} \right) = \frac{-Rd}{\pi(a+bx)^2} \quad (\text{Ec. 14})$$

Despejando du_x de (Ec. 13) se obtiene:

$$du_x = \frac{-Ri}{\pi E(a+bx)^2} dx + \alpha(T_{(x)} - T_i) dx \quad (\text{Ec. 15})$$

Se utiliza ahora la expresión hallada para la temperatura de la solución del problema térmico:

$$du_x = \frac{-Ri}{\pi E(a+bx)^2} dx + \alpha(s+rx - T_i) dx \quad (\text{Ec. 16})$$

Integrando (Ec. 16):

$$u_x = - \int_0^x \frac{Ri}{\pi E(a+bx)^2} dx + \alpha \int_0^x (s+rx - T_i) dx + c_1 \quad (\text{Ec. 17})$$

Utilizando la condición de frontera que establece que el desplazamiento es nulo en el extremo izquierdo se obtiene que la constante de integración en este caso es cero, de forma que la expresión para los desplazamientos en el primer tramo del eje es la siguiente:

$$u_1(x) = - \frac{Ri}{\pi E} \left(\frac{x}{a(a+bx)} \right) + \alpha \left(r \frac{x^2}{2} + (s - T_i)x \right) \quad (\text{Ec. 18})$$

Utilizando la condición de frontera que establece que el desplazamiento es nulo en el empotramiento derecho, se llega de igual forma a la expresión para los desplazamientos en el segundo tramo:

$$u_2(x) = \frac{Rd}{\pi E(a+bc)} \left(\frac{c-x}{a+bx} + \frac{L-c}{a+bL} \right) + \alpha \left(\frac{r}{2}(x^2 - L^2) + (s-Ti)(x-L) \right) \quad (\text{Ec. 19})$$

Las expresiones de los desplazamientos serán útiles ahora para determinar las reacciones en los empotramientos, ya que en $x = 2L/3$ los desplazamientos son iguales.

Reemplazando x en (Ec. 18) y (Ec. 19) por c , igualando estas expresiones y utilizando (Ec. 12), se obtiene que

$$Ri = 59219 \text{ N} \quad \text{y} \quad Rd = 119219 \text{ N}$$

Con estos valores se pueden ahora determinar las componentes del tensor de esfuerzo.

En el empotramiento izquierdo: $\sigma_{xx} = \frac{Ri}{A_1}$

En el empotramiento derecho: $\sigma_{xx} = \frac{Rd}{A_2}$

Para encontrar el sentido de las reacciones se multiplica el tensor de esfuerzos por un vector unitario normal al área de los empotramientos (ver figura 8).

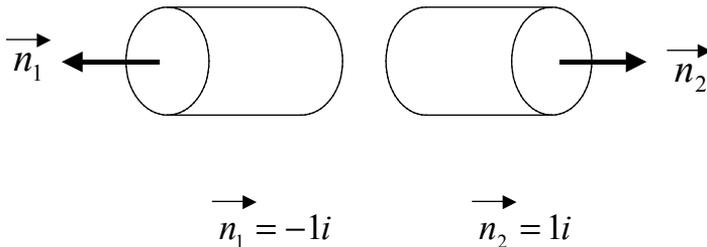


Figura 8. Vectores normales al área transversal del eje en los empotramientos

En el empotramiento izquierdo:

$$\begin{bmatrix} Ri/A_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Rizq/A_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow Rizq = 59219 N$$

En el empotramiento derecho:

$$\begin{bmatrix} Rd/A_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Rder/A_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow Rder = -119219 N$$

Los valores calculados indican el verdadero sentido de las reacciones; éstas dejan concluir que ambas secciones se encuentran sometidas a esfuerzos de compresión.

Una vez conocido el valor de las reacciones se puede conocer el desplazamiento a lo largo de la longitud del eje. La figura 9 muestra el desplazamiento en cada punto del mismo.

De igual forma se pueden conocer los esfuerzos a lo largo de la longitud del eje; de (Ec. 13) se tiene:

$$\sigma_{x1} = E \left(\frac{du_{x1}}{dx} - \alpha \Delta T_{(x)} \right) \quad (\text{Ec. 20})$$

y en el segundo tramo de (Ec. 14):

$$\sigma_{x2} = E \left(\frac{du_{x2}}{dx} - \alpha \Delta T_{(x)} \right) \quad (\text{Ec. 21})$$

La figura 10 ilustra los esfuerzos que se generan en el eje.

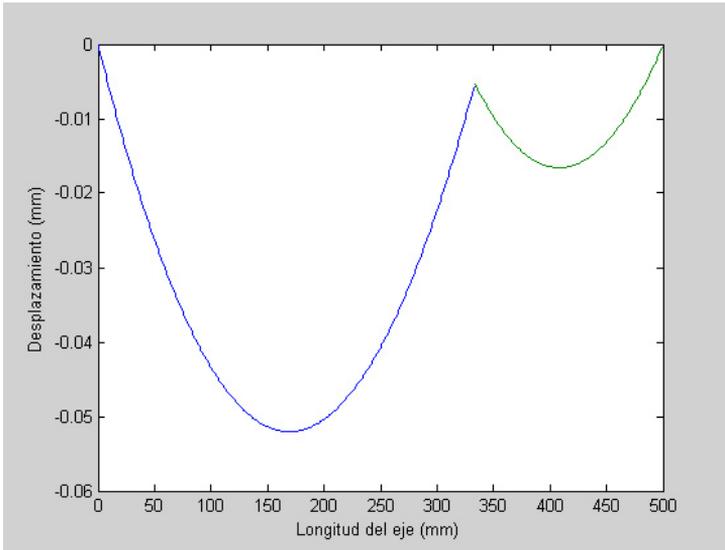


Figura 9. Gráfica de los desplazamientos a lo largo de la longitud del eje para la solución exacta

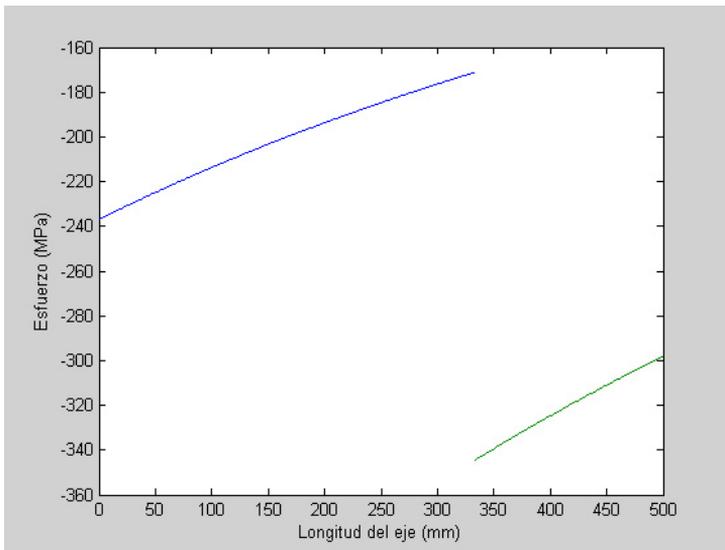


Figura 10. Gráfica de los esfuerzos a lo largo de la longitud del eje para la solución exacta

5. SOLUCIÓN APROXIMADA POR EL METODO DE RAYLEIGH - RITZ

En el estudio de cuerpos sometidos a diferentes condiciones de carga no siempre es posible obtener soluciones analíticas; muchas veces se recurre a soluciones aproximadas que se obtienen utilizando formulaciones variacionales de un problema.

Se emplea ahora el método de energía de Rayleigh–Ritz, con el propósito de comparar la solución que arroja este método con la solución exacta hallada anteriormente.

La energía potencial total Π de un cuerpo elástico es definida como la suma de la energía de deformación unitaria total U y el potencial de trabajo W .

$$\Pi = U + W \quad (\text{Ec. 22})$$

En cuerpos elásticos lineales U viene dada por

$$U = \frac{1}{2} \int_v \sigma \epsilon_p dV \quad (\text{Ec. 23})$$

Donde $\sigma = E\epsilon_p$:

$$dV = A_{(x)} dx = \pi(a+bx)^2 dx \quad (\text{Ec. 24})$$

Reemplazando (Ec. 7) y (Ec. 24) en (Ec. 23) se obtiene:

$$U = \frac{1}{2} \int_x E \left(\frac{du_x}{dx} - \alpha(T_{(x)} - T_i) \right)^2 \pi(a+bx)^2 dx \quad (\text{Ec. 25})$$

El potencial de trabajo W está dado por

$$W = P^* u_x \Big|_{x=\frac{2L}{3}} \quad (\text{Ec. 26})$$

De manera que la energía potencial total es:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_x E \left[\left(\frac{du_x}{dx} - \alpha(T_{(x)} - T_i) \right)^2 \pi(a+bx)^2 \right] dx - P^* u_x \Big|_{x=\frac{2L}{3}} \quad (\text{Ec. 27})$$

Ahora se debe escoger una familia de funciones que cumplan con las condiciones de frontera, en este caso:

$$u_{(0)}=u_{(L)}=0$$

Con las funciones de prueba se construye una función $\hat{u}_{(x)}$ que sea la solución aproximada del problema. La función

$$\hat{u}_{(x)} = \sum_{n=1}^N \beta_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

cumple con las condiciones de frontera, y por tal razón con ella se va a trabajar. Nótese que la función en sí es una sumatoria de términos, y como tal, entre mayor sea el número de términos mejor será la aproximación.

La ecuación (Ec. 27) queda ahora como

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_x E \left[\left(\sum_{n=1}^N \beta_n \frac{n\pi}{L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) - \alpha(T_{(x)} - T_i) \right)^2 \right] \pi (a + bx)^2 dx - P \sum_{n=1}^N \beta_n \text{sen}\left(\frac{2}{3} n\pi\right) \quad (\text{Ec. 28})$$

El procedimiento que se debe seguir ahora es el de escoger un número determinado de términos para trabajar y después desarrollar la integral; así se obtiene una función en termino de los coeficientes β

$$\Pi = \Pi(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N) \quad (\text{Ec. 29})$$

El principio de mínima acción establece que “*para sistemas conservativos, de todos los campos de desplazamiento cinemáticamente admisibles, aquellos que corresponden a condiciones de equilibrio extremizan la energía potencial total. Si la condición de extrema es un mínimo, es estado de equilibrio es estable*” (ver referencia [4]).

Debido a este principio, los valores de los coeficientes deben ser lo más pequeños posible, para que minimicen la función. Esta condición se cumple al derivar la función de energía con respecto a cada β_n e igualarla a cero.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \beta_n} = 0 \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots, N$$

La operación anterior da como resultado un sistema de N ecuaciones lineales con N incógnitas, equivalente a

$$[A]_{NxN}[\beta]_{Nx1}+[C]_{Nx1}=[0]_{Nx1}$$

donde

$[A]_{NxN}$: Matriz de coeficientes que acompañan a las incógnitas

$[\beta]_{Nx1}$: Matriz de incógnitas (coeficientes de \hat{u}_x)

$[C]_{Nx1}$: Términos independientes

$[0]_{Nx1}$: Matriz de ceros

La solución del sistema anterior nos da el valor de los coeficientes de la aproximación.

Verificación de la Aproximación

La verificación se lleva a cabo de dos formas: la primera se hace comparando los desplazamientos, y la segunda, comparando los esfuerzos. La aproximación se desarrolló utilizando funciones con 2, 5, 10 y 15 términos. Los resultados se muestran a continuación.

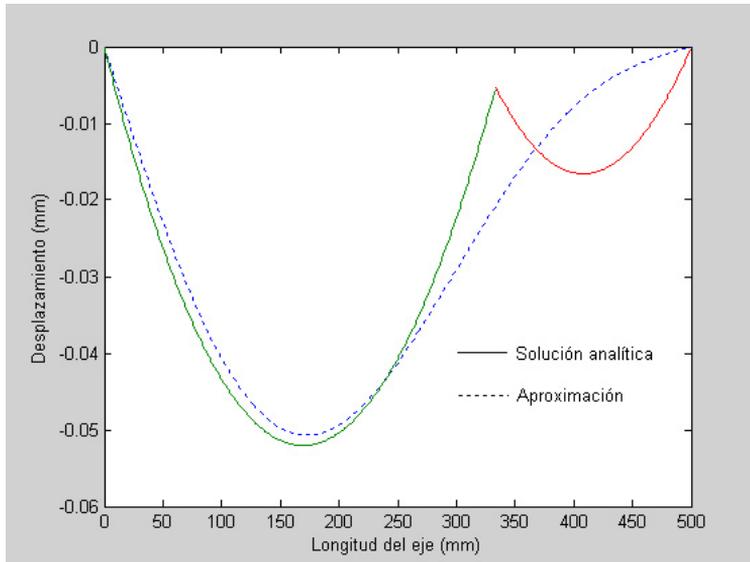


Figura 11. Comparación de los desplazamientos utilizando dos términos

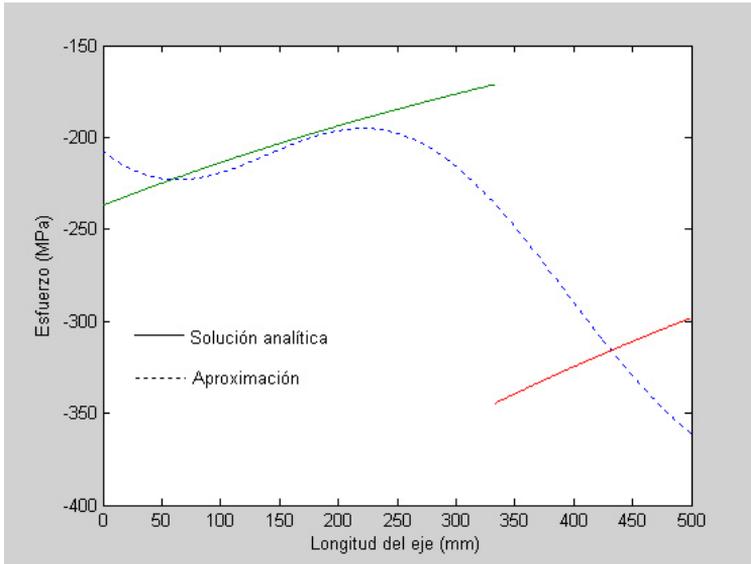


Figura 12. Comparación de los esfuerzos utilizando dos términos

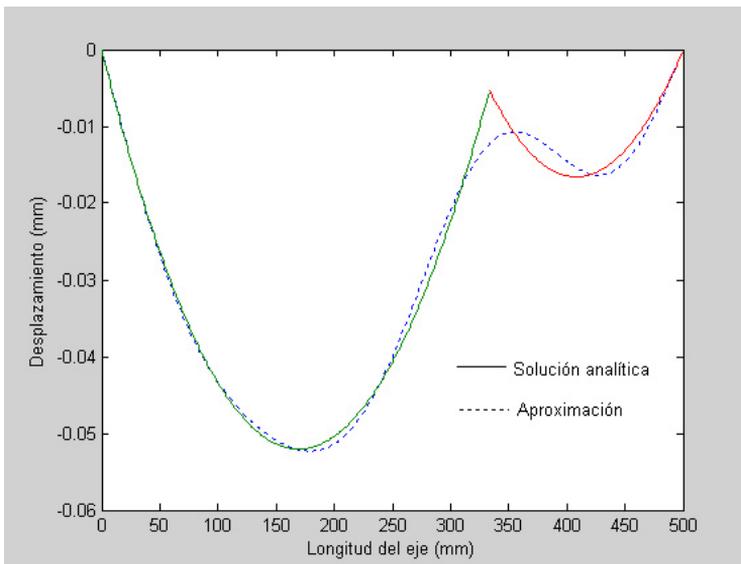


Figura 13. Comparación de los desplazamientos utilizando cinco términos

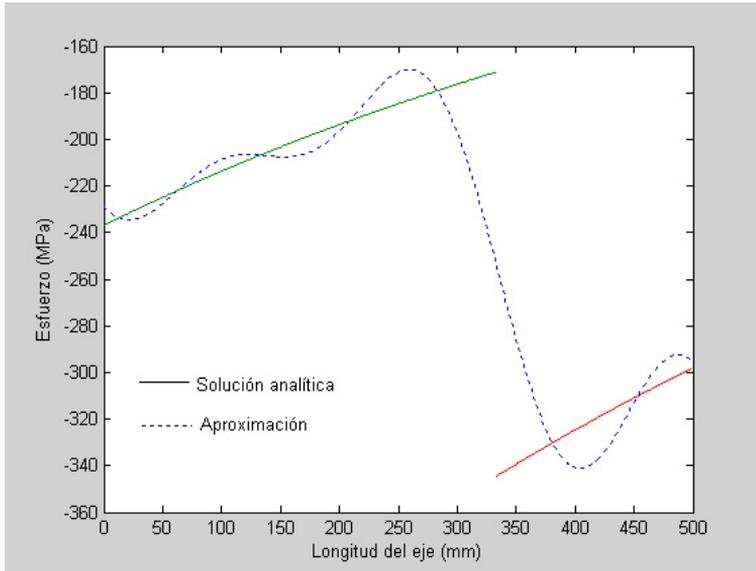


Figura 14. Comparación de los esfuerzos utilizando cinco términos

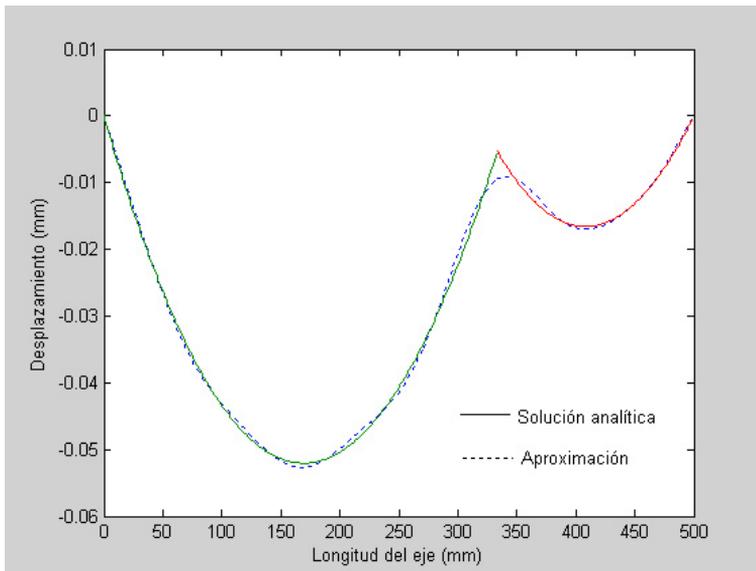


Figura 15. Comparación de los desplazamientos utilizando diez términos

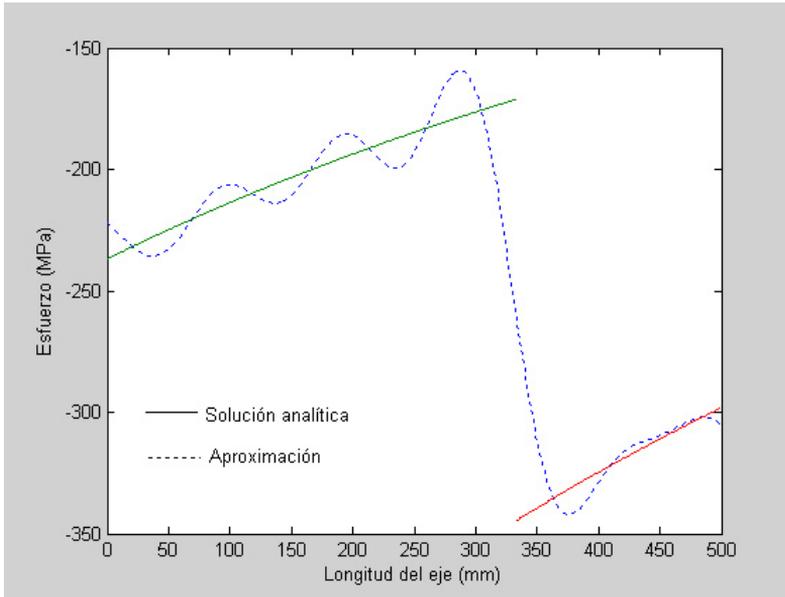


Figura 16. Comparación de los esfuerzos utilizando diez términos

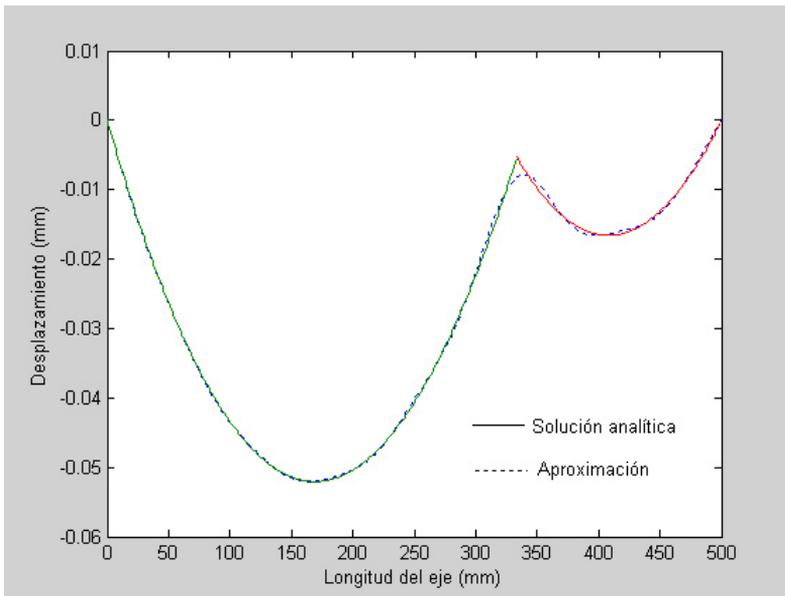


Figura 17. Comparación de los desplazamientos utilizando quince términos

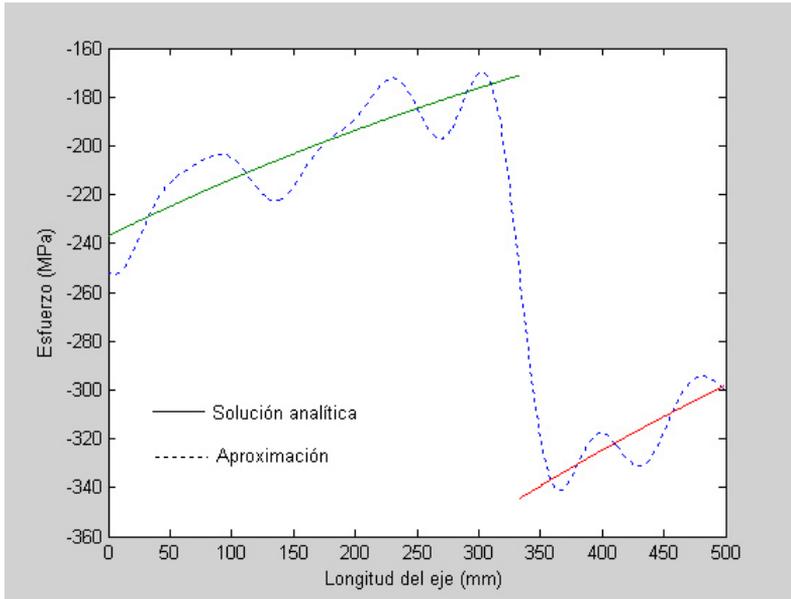


Figura 18. Comparación de los esfuerzos utilizando quince términos

Las gráficas anteriores muestran cómo se mejora la aproximación a medida que aumenta el número de términos en ella.

La comparación que se acaba de realizar muestra que el campo de desplazamientos obtenido por el método de energía se encuentra muy próximo al de la solución analítica; sólo existe una diferencia en el punto de aplicación de la carga. Por el contrario, se observa que el campo de esfuerzos es más complicado de reproducir.

El cálculo de las reacciones en los apoyos se lleva a cabo de la siguiente forma:

$$R_{izq} = E \left(\frac{du_x}{dx} - \alpha(T_{(x)} - T_i) \right) \pi(a + bx)^2 \Big|_{x=0}$$

$$R_{der} = E \left(\frac{du_x}{dx} - \alpha(T_{(x)} - T_i) \right) \pi(a + bx)^2 \Big|_{x=L}$$

La siguiente tabla muestra las reacciones que se obtuvieron con las distintas aproximaciones son:

Tabla 1

Comparación de las reacciones encontradas con el método analítico y el de Rayleigh-Ritz

	R_{izq}	R_{der}
Analítica	-59219	-119219
R-Ritz 2 términos	-51860	-144470
R-Ritz 5 términos	-57228	-118250
R-Ritz 10 términos	-55472	-122210
R-Ritz 15 términos	-62860	-120120

6. SOLUCIÓN POR ELEMENTOS FINITOS

La solución por elementos finitos para el problema que se plantea se obtiene utilizando ANSYS como *software* para el análisis de los esfuerzos y las deformaciones que se presentan en el eje.

El eje se discretiza como una barra empotrada en cada uno de sus extremos; para el análisis de los esfuerzos se emplean diez elementos bidimensionales *link 1* (elemento uniaxial con dos grados de libertad en cada nodo), y para el análisis térmico se emplean elementos *link 32* (elemento que tiene un solo grado de libertad, la temperatura, en cada nodo), y se asigna a cada uno de los elementos sus respectivas propiedades.

Del análisis conjunto de los efectos de carga y temperatura se obtienen los desplazamientos y esfuerzos a lo largo de la longitud del eje, como se ilustra en las figuras 19 y 20.

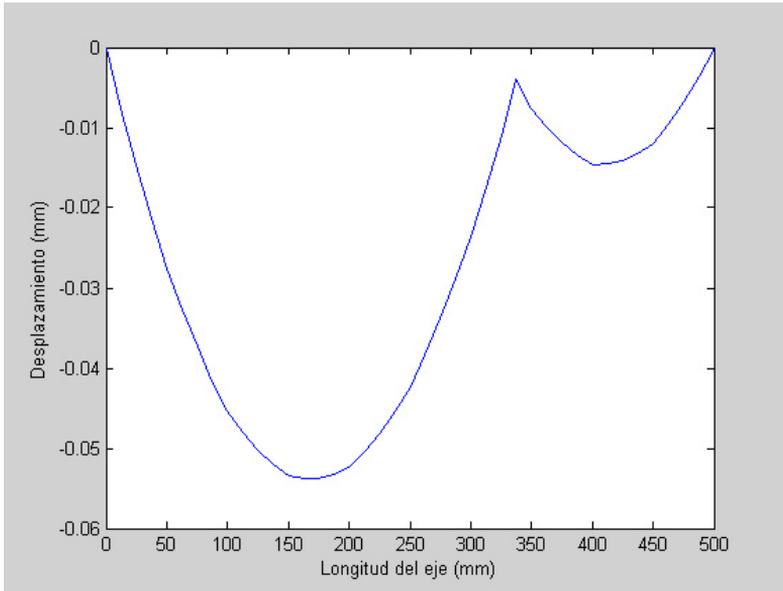


Figura 19. Gráfica de los desplazamientos a lo largo de la longitud del eje para la solución por elementos finitos

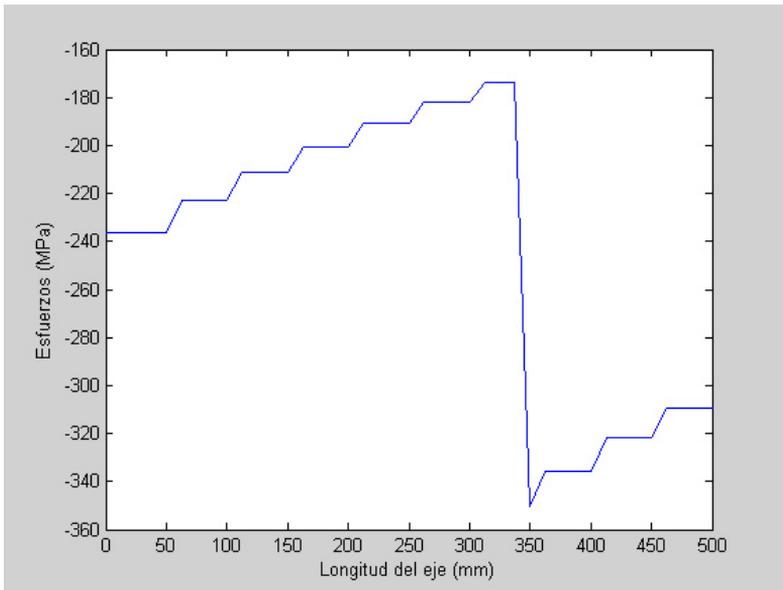


Figura 20. Gráfica de los esfuerzos a lo largo de la longitud del eje para la solución por elementos finitos

7. COMPARACIÓN ENTRE MÉTODOS DE SOLUCIÓN

Las figuras 21 y 22 muestran comparativamente las gráficas de los desplazamientos y esfuerzos obtenidas para cada uno de los métodos de solución; en el caso del método de energía se selecciona la gráfica de verificación utilizando quince términos.

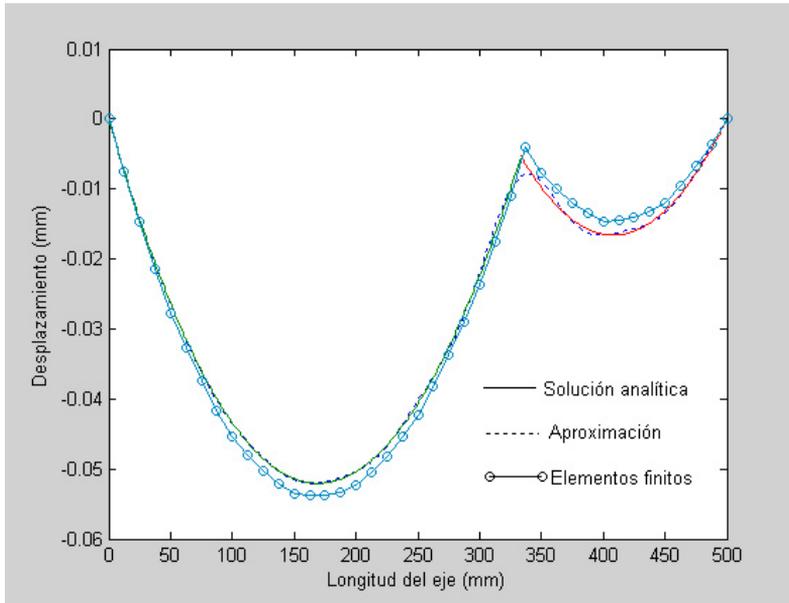


Figura 21. Comparación entre gráficas de los desplazamientos a lo largo de la longitud del eje

La gráfica de los desplazamientos muestra que los tres métodos se encuentran muy próximos; sin embargo, la solución exacta y el método de energía se encuentran casi superpuestos, lo que indica una mejor solución por parte de este último método. Ahora, en la región cercana a $2L/3$ el método de elementos finitos define una mejor respuesta para el desplazamiento, es decir, se acerca a la solución exacta.

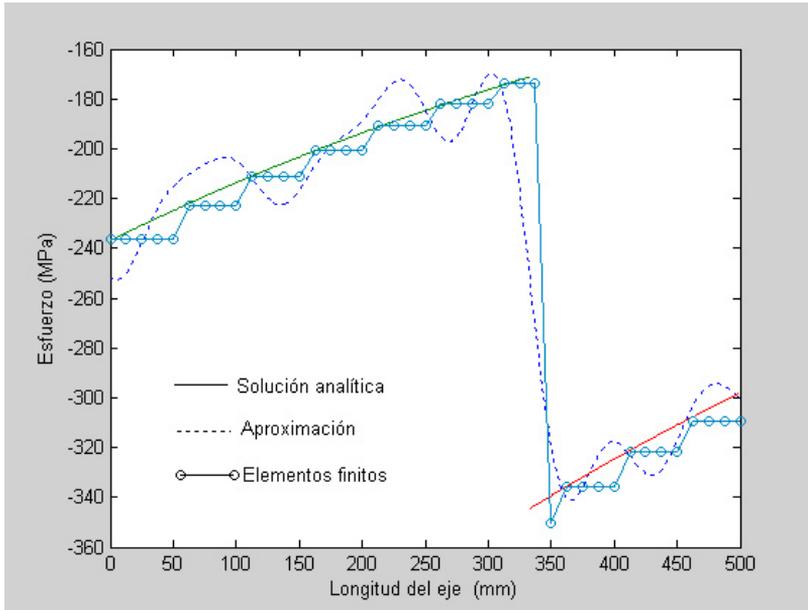


Figura 22. Comparación entre gráficas de los esfuerzos a lo largo de la longitud del eje

La gráfica de los esfuerzos muestra un poco de distorsión en la solución suministrada por los métodos de energía y elementos finitos. La solución por elementos finitos presenta un escalonamiento producto de los elementos diferenciales tomados para realizar el análisis; esta curva toca la solución exacta en algunos puntos; por otra parte, la solución por el método de energía muestra ondas que atraviesan la solución exacta.

La figura 22 ilustra que ambos métodos tienen la tendencia de seguir la línea de la solución exacta.

CONCLUSIONES

El objetivo principal de este estudio era comparar diferentes esquemas de solución, uno analítico y dos numéricos (Rayleigh-Ritz y elementos finitos), en la solución para el campo de esfuerzos y las deformaciones que se presentan en un eje de sección transversal variable sometido a un cambio de temperatura no uniforme. Los métodos numéricos empleados están basados en el mismo principio de energía, pero difieren en el tipo de funciones empleadas para describir el campo de desplazamientos. Teniendo en cuenta lo anterior, y los resultados obtenidos, se puede concluir que

- Del análisis de Transferencia de Calor se obtiene que la distribución de la temperatura en el eje tiene un comportamiento aproximadamente lineal, muy a pesar del comportamiento exponencial de la conductividad térmica.
- El campo de desplazamiento es contrario a la dirección de la fuerza en todo el dominio. Resulta claro entonces que la carga puntual apenas tiene un valor suficiente. Así, el valor máximo de los desplazamientos es de -0.052 mm a 173 mm del empotramiento izquierdo (primer tramo) y de -0.017 mm a 408 mm medidos a partir de la misma referencia (segundo tramo).
- La carga puntual ubicada a $2L/3$ en el eje genera un cambio brusco tanto en los desplazamientos como en los esfuerzos; cabe destacar que esto no es físicamente posible, ya que dicho cambio se presenta como consecuencia del modelo de carga puntual.
- En el segundo tramo, los desplazamientos se reducen con respecto al primero; esto debido principalmente a la dirección de la carga. Así mismo, los esfuerzos que en su totalidad son de compresión muestran una tendencia lineal en ambos tramos. Para el primer tramo, el esfuerzo va desde -240 hasta -180 MPa, y en el segundo tramo, de -340 hasta -300 MPa.
- Los métodos aquí desarrollados para la solución al problema del eje son alternativas que requieren de un cuidadoso análisis para no incurrir en soluciones erróneas que afecten posteriormente el estudio que se desarrolla, pero que conllevan a una respuesta bastante satisfactoria que se ajusta a la solución analítica del sistema.
- El método de Rayleigh-Ritz es una herramienta que proporciona una solución bastante acertada al problema del eje empotrado, pero es una metodología muy elaborada, en donde obtener una buena aproximación requiere de múltiples verificaciones que permitan acercarse con mayor precisión a la solución analítica. Por el contrario, el método de elementos finitos ofrece una solución bastante satisfactoria y de manera rápida del problema en cuestión, al sacar ventaja de funciones con soporte compacto y cuya integración en cada uno de los subdominios es mucho más sencilla (funciones de forma lineales).

Referencias

- [1] BORESI, A. & CHONG, K. (2000). *Elasticity in engineering mechanics* (2ª ed.). USA: John Wiley & Sons.
- [2] BEER, F.P. & JOHNSTON, R.Jr. (1993). *Mecánica de Materiales* (2ª ed., p. 39-103). Bogotá: Mc Graw-Hill.
- [3] MATHEWS, J.H. & FINK, K. (2000). *Métodos numéricos con Matlab* (3ª ed., p. 371-394). Madrid: Prentice-Hall.
- [4] CHANDRUPATLA, T. & BELEGUNDU, A. *Introducción al estudio del elemento finito para ingenieros* (2ª ed., p. 209-215). México: Prentice Hall Hispanoamérica.
- [5] USING MATLAB VERSIÓN 6.0 (2000). USA: The Math Works.