Secciones locales continuas en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$

Ismael Gutiérrez*

Resumen

En este trabajo se desarrolla una caracterización de los operadores lineales y acotados definidos sobre un espacio de Hilbert complejo $\mathcal{H}$, de dimensión infinita, que admiten una sección local continua.

Palabras claves: *Espacio de Hilbert complejo, operadores lineales continuos, secciones locales continuas.*

Abstract

In this work we wants to show a characterization of the linear and bounded operators defined on a infinite dimensional complex Hilbert space $\mathcal{H}$, who admit a local continuous cross section.

Key words: *Complex Hilbert space, bounded linear operators, local cross section.*

Fecha de recepción: 3 de abril de 2003
Fecha de aceptación: 14 de mayo de 2004

1. INTRODUCCIÓN

En la década de los años cincuenta aparece en el mundo matemático, de manera sistemática, la noción de un **haz**. Esta de manera natural induce el concepto de sección local continua para el haz. Un haz no es más que una tripla (E, π, B), donde E y B son espacios topológicos y $\pi : E \longrightarrow B$ es una función continua y sobreyectiva. Usualmente, los espacios E y B son denominados espacio total y espacio base respectivamente, π es llamada la proyección del haz.

Una sección local continua para un haz (E, π, B) es un par $(\mathcal{B}, \varphi)$, donde $\mathcal{B}$ es un subconjunto abierto de B y $\varphi : \mathcal{B} \longrightarrow E$ es continua y se verifica además que $\pi \circ \varphi = I_{\mathcal{B}}$.

*Profesor Universidad del Norte. Lic. Matemáticas y Física, Universidad del Atlántico, Magister en Matemáticas, Universidad del Valle - Universidad del Norte, Dr. rer. nat. Universidad de Mainz - Alemania. isgutier@uninorte.edu.co

Es de gran interés teórico determinar qué condiciones debe cumplir la proyección del haz para que se garantice la existencia de secciones locales continuas. En este contexto, la existencia de secciones locales continuas es equivalente a la trivialidad local del haz.

Abordaremos el estudio de este problema en un contexto muy particular. En este trabajo, el espacio ambiente global será el álgebra de todos los operadores lineales y acotados, definidos sobre un espacio de Hilbert complejo, separable y de dimensión infinita $\mathcal{H}$. Este espacio lo denotamos con $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

El espacio total del haz es un subconjunto de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, el grupo de los operadores unitarios, el cual notamos con $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\mathcal{H})$, y el espacio base es la órbita unitaria de un elemento fijo $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, la cual se nota y define así:

$$\mathcal{U}(T) := \{u^*Tu \mid u \in \mathcal{U}\} \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H}) \tag{1}$$

Además, la proyección la notamos y definimos por: $\pi_T(u) = uTu^* \;\; \forall u \in \mathcal{U}$.

Frecuentemente en la teoría de operadores se estudian también subconjuntos de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ que presentan estructura diferenciable, es decir, variedades que en general son de dimensión infinita. En muchos casos, estas variedades son espacios homogéneos, es decir que sobre ellos actúa un grupo de Lie de Banach de manera diferenciable y transitiva. La dificultad que se presenta en dimensión infinita es que no siempre está garantizada la existencia de secciones locales continuas.

La no existencia de estas secciones locales continuas suele originarse en el hecho de que la topología cociente de la órbita inducida por el grupo de Lie es más fina que la topología de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Se trata entonces de abordar un problema no trivial, caracterizar los elementos de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ para los que las topologías indicadas anteriormente coinciden. Esto es, si consideramos una vecindad básica de un elemento $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ en el espacio $(\mathcal{U}(T), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})})$ está dada por el conjunto $\{s \in \mathcal{U}(T) \mid \|s - T\| < \delta\}$ para algún $\delta > 0$ y en el espacio $(\mathcal{U}(T), \tau_c)$ esta misma vecindad es de la forma $\{w^*Tw \mid \|w - 1\| < \epsilon\}$ para algún $\epsilon > 0$, (τ_c denota la topología inducida por el grupo $\mathcal{U}$), buscamos entonces las condiciones para que dichas vecindades sean iguales.

2. C^*-ÁLGEBRAS Y REPRESENTACIONES

Definimos inicialmente una estructura algebraica y topológica muy especial, las C^*-álgebras complejas de dimensión finita. Para ello presentaremos algunas definiciones y lemas que nos permitirán demostrar un teorema importante de isomorfía.

$\mathbb{C}$- siempre denotará el campo de los números complejos.

2.1 Definición

Un álgebra compleja $\mathcal{A}$ (o una $\mathbb{C}$-álgebra) es un conjunto dotado de tres operaciones, suma, multiplicación por escalar y multiplicación $(\mathcal{A}, +, \cdot, \times)$ tal que se verifican los siguientes axiomas:

A_1. $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$.

A_2. $(\mathcal{A}, +, \times)$ es un anillo (no necesariamente conmutativo). Usualmente para $a \times b$ escribimos simplemente ab, para todo $a, b \in \mathcal{A}$.

A_3. $\forall \lambda \in \mathbb{C},\ \forall x, y \in \mathcal{A}$ se tiene que $\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$.

Asumiremos siempre que todas las álgebras tienen una unidad.

2.2 Definición

Un $*$-álgebra compleja es un álgebra compleja $\mathcal{A}$, equipada con una función: $* : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ (usualmente denominada involución sobre $\mathcal{A}$), la cual satisface las siguientes propiedades:

1. $(x+y)^* = x^* + y^* \quad \forall x, y \in \mathcal{A}$
2. $(\lambda x)^* = \overline{\lambda} x^* \quad \forall x \in \mathcal{A},\ \forall \lambda \in \mathbb{C}$
3. $(xy)^* = y^* x^* \quad \forall x, y \in \mathcal{A}$
4. $(x^*)^* = x \quad \forall x \in \mathcal{A}$.

El elemento x^* se denomina usualmente **adjunto** de x.

2.1 Ejemplo

El conjunto de todas los operadores lineales y acotados definidos sobre $\mathcal{H}$, donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{C}$. La involución se tiene en el siguiente sentido: Dado $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ existe un único $T^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tal que: $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle\ \forall\, x, y \in \mathcal{H}$.

2.3 Definición

Un álgebra compleja $\mathcal{A}$ dotada de una norma $\|\cdot\|$ se denomina álgebra de Banach si es completa y la norma satisface

1. $\|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad \forall x, y \in \mathcal{A}$
2. $\|1_{\mathcal{A}}\| = 1.$

Una vez más, asumir que $\|1_{\mathcal{A}}\| = 1$ no es crucial, es solamente una normalización que hace los cálculos más fáciles.

Ahora definimos una estructura algebraica y analítica, la cual establece una conexión entre la norma y la involución de una $*$-álgebra de Banach compleja.

2.4 Definición

Una C^*-álgebra compleja es un $*$-álgebra de Banach compleja $\mathcal{A}$ que satisface

$$\|x^*x\| = \|x\|^2 \quad \forall x \in \mathcal{A} \tag{2}$$

Usualmente para referirse a la propiedad (2) se dice que la norma es $*$-cuadrática. Es fácil verificar que en una C^*-álgebra compleja $\mathcal{A}$, un elemento x y su adjunto x^* tienen igual norma.

2.2 Ejemplo

Algunos ejemplos de C^*-álgebras complejas:

1. $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$, el conjunto de todas las funciones continuas con valor complejo definidas sobre X, con las operaciones puntuales y la norma $\sup$, siendo X un espacio compacto Haussdorff.
2. $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ (ver el ejemplo 2.1)

A lo largo de este artículo, el concepto de representación de una C^*-álgebra compleja sobre un espacio de Hilbert complejo juega un papel importante. Presentamos éste a continuación:

2.5 Definición

Sea $\mathcal{A}$ una C^*-álgebra compleja, una representación de $\mathcal{A}$ sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un $*$-homomorfismo de álgebras complejas

$$\rho : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}) \tag{3}$$

Es decir, los elementos de $\mathcal{A}$ pueden identificarse con operadores lineales acotados definidos sobre $\mathcal{H}$. Otro concepto importante es el de suma directa de representaciones.

Existen dos conceptos importantes en la teoría de representaciones de C^*-álgebras complejas: las representaciones equivalentes y las aproximadamente equivalentes. Presentamos ahora sus definiciones y los resultados básicos inherentes a éstas.

2.6 Definición

Sean $\mathcal{A}$ una C^*-álgebra compleja, ρ_1 y ρ_2 representaciones de $\mathcal{A}$ sobre espacios de Hilbert complejos $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ respectivamente. Se dice que ρ_1 es equivalente a ρ_2 (notado $\rho_1 \sim \rho_2$) si y sólo si existe $u : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ unitario tal que

$$\rho_1(a) = u^* \rho_2(a) u \quad \forall a \in \mathcal{A}. \tag{4}$$

Para simplificar la escritura, cuando se diga que ρ_k es una representación de $\mathcal{A}$, se está afirmando que ρ_k es una representación de una C^*-álgebra compleja $\mathcal{A}$ sobre un espacio de Hilbert complejo $\mathcal{H}_k$.

Se puede demostrar que $\sim$ induce una relación de equivalencia sobre el conjunto de las representaciones de $\mathcal{A}$. Para más detalles, ver [9] sección 2.3.

2.7 Definición

Sean ρ_1 y ρ_2 representaciones de $\mathcal{A}$, se dice que ρ_1 y ρ_2 son aproximadamente equivalentes (notado $\rho_1 \sim_a \rho_2$) si existe una sucesión de operadores unitarios $\{u_k\}_k \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ tal que se verifican

$$(\rho_1(a) - u_k^* \, \rho_2(a) \, u_k) \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_1) \quad \forall \, a \in \mathcal{A} \tag{5}$$

$$\lim_{k \to \infty} \|\rho_1(a) - u_k^* \rho_2(a) u_k\| = 0 \quad \forall \, a \in \mathcal{A} \tag{6}$$

Nota: El símbolo $\mathcal{K}(\mathcal{H}_1)$ denota el espacio de los operadores lineales compactos definidos de $\mathcal{H}_1$ en sí mismo.

En la sección 2.3 de [9] se demuestra que $\sim_a$ induce también una relación de equivalencia sobre el conjunto de las representaciones de $\mathcal{A}$.

2.1 Teorema

Sean $\mathcal{A}$ una C^*-álgebra compleja separable, ρ_1 y ρ_2 representaciones de $\mathcal{A}$. Consideremos

$$\mathcal{H}'_k := \overline{\rho_k(\ker(p \circ \rho_k))\mathcal{H}_k} \quad k = 1, 2$$

entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. $\rho_1 \sim_a \rho_2$.

2. Existe una sucesión de operadores unitarios $u_k : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ tal que:
$$\lim_{k\to\infty} \|\rho_1(x) - u_k^* \rho_2(x) u_k\| = 0 \quad \forall\, x \in \mathcal{A}. \tag{7}$$

3. $\mathcal{I} = \ker(p \circ \rho_1) = \ker(p \circ \rho_2)$, $\ker \rho_1 = \ker \rho_2$ y las representaciones de $\mathcal{A}$ sobre $\mathcal{H}'_1$ y $\mathcal{H}'_2$ inducidas por ρ_1 y ρ_2 respectivamente son equivalentes.

4. $\mathcal{I} = \ker(p \circ \rho_1) = \ker(p \circ \rho_2)$, $\ker \rho_1 = \ker \rho_2$ y las representaciones de $\mathcal{I}$ sobre $\mathcal{H}'_1$ y $\mathcal{H}'_2$ inducidas por ρ_1 y ρ_2 respectivamente son equivalentes.

DEMOSTRACIÓN:
Ver [9], sección 2.3 □

El siguiente teorema, central en la teoría, fue desarrollado también por Dan Voiculescu. Con base en los conceptos de representaciones equivalentes y aproximadamente equivalentes de una C^*-álgebra compleja $\mathcal{A}$, se puede obtener información de tipo algebraica de ésta.

Se trata de establecer condiciones necesarias y suficientes para que la imagen de $\mathcal{A}$ a través de una representación ρ sea de dimensión finita.

2.2 Teorema

Sea $\mathcal{A}$ una C^*-álgebra compleja separable, y sea ρ una representación de $\mathcal{A}$ sobre $\mathcal{H}$, para que toda representación de $\mathcal{A}$ aproximadamente equivalente a ρ sea equivalente a ρ es necesario y suficiente que $\rho(\mathcal{A})$ sea de dimensión finita.

DEMOSTRACIÓN:
Ver [9] sección 2.4 □

3. SECCIONES LOCALES CONTINUAS

Consideramos inicialmente algunas definiciones y proposiciones en un contexto general y luego examinamos sus equivalentes en el espacio ambiente del trabajo. Es decir $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, el conjunto de todos los operadores lineales y acotados definidos sobre un espacio de Hilbert complejo $\mathcal{H}$.

3.1 Definición

Sea G un grupo. Una topología τ sobre G se dice compatible con la estructura de grupo si las funciones $G \times G \ni (x, y) \longmapsto xy \in G$ y $G \ni x \longmapsto x^{-1} \in G$ son continuas. Un grupo topológico es un par (G, τ), donde G es un grupo y τ es una topología sobre G compatible con su estructura de grupo.

Ahora nos concentramos en un ejemplo especial de grupo topológico.

3.1 Ejemplo

Denotemos con $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\mathcal{H}) := \{u \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \mid u^* = u^{-1}\}$ el grupo de todos los operadores acotados y unitarios definidos sobre un espacio de Hilbert complejo, $\mathcal{H}$. Si consideramos τ como la topología inducida por la norma de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, se tiene que $(\mathcal{U}, \tau)$ es un grupo topológico.

Puede verificarse que para $u \in \mathcal{U}$ se tiene que $\|u\| = 1$ en efecto:

$$\|u\|^2 = \|u^*u\| = \|u^{-1}u\| = 1$$

Sea ahora H un subgrupo cerrado de un grupo topológico (G, τ_G), entonces H es también un grupo topológico con la topología relativa, esto es, $\tau' = \{B \cap H \mid B \in \tau_G\}$.

Denotemos con G/H el conjunto de las clases laterales izquierdas de H en G. La proyección canónica de G sobre G/H $p : G \longrightarrow G/H$ se define por $p(x) = xH$.

Además de considerar algebraicamente a G/H, podemos mirarlo como un espacio topológico. Basta con dotar a éste de la toplología cociente, esto es, $(G/H, \tau_H)$, donde $\tau_H := \{E \subset G/H \mid p^{-1}(E) \in \tau\}$, la cual es Haussdorff.

3.1 Lema

Sea H un subgrupo cerrado de un grupo topológico G, p la proyección canónica de G sobre G/H, entonces:

1. p es una aplicación continua y abierta.

2. Para todo $a \in G$ las vecindades de $p(a)$ son precisamente los conjuntos $p(aV)$, donde V es una vecindad de 1_G.

DEMOSTRACIÓN:
Ver [1] teorema (4.5) $\square$

Usualmente, los elementos de un grupo pueden mirarse como operadores que actúan sobre un conjunto cualquiera. Esto se puede notar en la siguiente definición.

3.2 Definición

Sean G un grupo, E un conjunto. Una acción de G sobre E es una función $(s, x) \longmapsto sx$ de $G \times E$ en E que satisface:

1. $s(tx) = (st)x \ \forall\, x \in E, \ \forall\, s, t \in G.$

2. $1_G x = x \ \forall\, x \in E.$

Si G es un grupo topológico y E un espacio topológico, diremos que G actúa continuamente sobre E si la aplicación $G \times E \ni (s, x) \longmapsto sx \in E$ es continua.

Además, diremos que G actúa transitivamente sobre E si y sólo si para todo $x, y \in E$ existe $g \in G$ tal que $gx = y$.

Introducimos, ahora, alguna notación y terminología adecuada para mostrar un ejemplo importante de la acción de un grupo sobre un conjunto.

Sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ (fijo) definimos su órbita unitaria así:

$$\mathcal{U}(T) := \{u^* T u \mid u \in \mathcal{U}\} \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$$

Al igual que en $\mathcal{U}$ podemos obtener información de la norma de los elementos en $\mathcal{U}(T)$. En efecto, sea $y \in \mathcal{U}(T)$, entonces existe $u \in \mathcal{U}$ tal que $y = u^* T u$, entonces $\|y\| = \|u^* T u\| \leq \|u^*\| \|T\| \|u\| = \|T\|$.

Por otro lado, se tiene que $\|T\| = \|uyu^*\| \leq \|u^*\| \|y\| \|u\| = \|y\|$. Así, se concluye que $\|T\| = \|y\|$, es decir, podemos afirmar que $\mathcal{U}(T)$ está contenida en la esfera de radio $\|T\|$ en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

3.2 Ejemplo

Afirmamos anteriormente que $\mathcal{U}$ es un grupo topológico, $\mathcal{U}(T)$ es un espacio topológico con la topología relativa (al respecto de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$), definamos la acción

$$\mathcal{U} \times \mathcal{U}(T) \ni (u, m) \longmapsto um := umu^* \in \mathcal{U}(T) \tag{8}$$

Fijando un punto $p \in \mathcal{U}(T)$, digamos que $p = p_1^* T p_1$ y dado otro punto $q \in \mathcal{U}(T),\ q = q_1^* T q_1$, siempre es posible encontrar un elemento $u \in \mathcal{U}$ tal que $up = q$ (la acción definida por (8)). En efecto, basta que definamos $u := q_1^* p_1$ y se tiene que

$$up = upu^* = q_1^* p_1 p_1^* T p_1 p_1^* q_1 = q_1^* T q_1 = q$$

Es decir, se tiene que $\mathcal{U}$ actúa transitivamente sobre $\mathcal{U}(T)$, lo cual nos permite concluir que $\mathcal{U}(T)$ es un **espacio homogéneo**.

Retornemos al contexto general, sea (G, τ_G) un grupo topológico que actúa de manera continua y transitiva sobre un espacio topológico (M, τ_M). Esto es, existe una acción continua $(g, m) \longmapsto gm$ de $G \times M$ hasta M.

En los espacios homogéneos son importantes las clases laterales. Sea $m_0 \in M$ fijo, el estabilizador de m_0 se nota y define así:

$$H_{m_0} := \{g \in G \mid gm_0 = m_0\}$$

Este es un subgrupo cerrado de G. Por otro lado, podemos considerar el conjunto

$$G/H_{m_0} = \{gH_{m_0} \mid g \in G\}$$

el cual podemos dotarlo de la topología cociente τ_c y tenemos así un espacio topológico importante $(G/H_{m_0}, \tau_c)$.

Se puede demostrar que la función

$$G/H_{m_0} \ni gH_{m_0} \overset{f}{\longmapsto} gm_0 \in M \tag{9}$$

es una biyección.

Una pregunta interesante es: ¿Bajo qué condiciones la biyección (9) es continua? Retomando la proyección canónica $p : (G, \tau_G) \longrightarrow (G/H_{m_0}, \tau_c)$, se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
(G,\tau_G) \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "f\circ p"'] & (G/H_{m_0},\tau_c) \arrow[d, "f"] \\
& (M,\tau_M)
\end{tikzcd}$$

3.1 Proposición

En el diagrama anterior, f es continua al respecto de la topología cociente, si y sólo si $f \circ p$ lo es.

DEMOSTRACIÓN:
Si f es continua al respecto de la topología cociente, se tiene de manera inmediata que $f \circ p$ es continua.

Supongamos ahora que $f \circ p$ es continua al respecto de la topología τ_G, sea U un τ_M-abierto, entonces $(f \circ p)^{-1}(U)$ es un τ_G-abierto. Digamos que $p^{-1}(f^{-1}(U)) = V$, entonces $f^{-1}(U) = p(V)$, el cual es un τ_c-abierto, ya que p es una aplicación abierta. Entonces se tiene que f es continua al respecto de la topología cociente. $\square$

También cabe preguntarnos ¿cuándo la biyección (9) es un homeomorfismo?

Retomamos nuestro espacio ambiente $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, presentemos algunas definiciones y luego resolvemos allí el interrogante, el cual está ligado al concepto de sección local continua de un operador.

Denotemos por π_T la función continua en la norma de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ definida por

$$\mathcal{U} \ni u \overset{\pi_T}{\longmapsto} uTu^* \in \mathcal{U}(T) \tag{10}$$

El concepto de sección local continua para π_T lo definimos a continuación.

3.3 Definición

Una sección local continua para π_T es un par $(\varphi_T, \mathcal{B})$ tal que $\mathcal{B}$ es un conjunto relativamente abierto en $\mathcal{U}(T)$ que contiene a T y φ_T es una función continua en la norma de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ definida de $\mathcal{B}$ hasta $\mathcal{U}$ tal que: $\varphi_T(T) = 1$ y $\pi_T(\varphi_T(s)) = s \quad \forall\, s \in \mathcal{B}$.

Nota: Si π_T admite una sección local continua, decimos que T tiene una sección local continua y unitaria.

Ahora, particularizamos a $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ la situación del diagrama conmutativo anterior. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ fijo, cuya órbita denotamos nuevamente con $\mathcal{U}(T)$, el estabilizador de T es el conjunto

$$H_T = \{u \in \mathcal{U} \mid u^*Tu = T\} = \{u \in \mathcal{U} \mid \pi_T(u) = T\} = \pi_T^{-1}(T)$$

Nuevamente se tiene que H_T es un subgrupo cerrado de $\mathcal{U}$ y podemos considerar el espacio

$$\mathcal{U}/H_T = \{uH_T \mid u \in \mathcal{U}\}$$

La proyección canónica de $\mathcal{U}$ sobre $\mathcal{U}/H_T$ la denotamos con p y definimos la función

$$\mathcal{U}/H_T \ni uH_T \stackrel{f}{\longmapsto} \pi_T(u) \in \mathcal{U}(T) \tag{11}$$

Se tiene entonces el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U} \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "\pi_T"'] & \mathcal{U}/H_T \arrow[d, "f"] \\ & \mathcal{U}(T) \end{tikzcd}$$

Anteriormente demostramos que la aplicación (11) es una biyección continua y que no necesariamente es un homeomorfismo. Esta dificultad se origina en el hecho de que en espacios de dimensión infinita no siempre está garantizada la existencia de secciones locales continuas.

La no existencia de secciones locales continuas es una consecuencia de que la topología inducida por el grupo es estrictamente más fina que la topología de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Sin embargo, note que si suponemos la existencia de una sección local continua $(\varphi_T, \mathcal{B})$ para π_T es inmediato que f tiene una inversa local continua. En efecto, podemos definir $f^{-1} := p \circ \varphi_T$, entonces f es un homeomorfismo.

Demostramos a continuación que si T tiene una sección local continua unitaria, se verifica la siguiente propiedad de levantamiento sucesional unitario:

(P) Si $\{u_n\} \subseteq \mathcal{U}$ con $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n^* T u_n - T\| = 0$, entonces existe una sucesión $\{w_n\} \subseteq \mathcal{U}$ tal que: $\lim\limits_{n\to\infty} \|w_n - 1\| = 0$ y $w_n^* T w_n = u_n^* T u_n$ $\forall\, n$.

Note que en principio no se exige que $u_n \to 1$; en este sentido, se trata entonces de reimplantar a $\{u_n\}$ en el grupo unitario por una sucesión $\{w_n\}$ que sea convergente a 1 y que además cumpla con la condición $\pi_T(w_n) = \pi_T(u_n)$ para todo n.

3.2 Proposición

Sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, si T admite una sección local continua unitaria, entonces se verifica la propiedad (P).

DEMOSTRACIÓN:

Supongamos que T tiene una sección local continua unitaria $(\varphi_T, \mathcal{B})$ y sea $\{u_n\} \subseteq \mathcal{U}$ tal que $u_n^* T u_n \to T$ si definimos $w_n^* := \varphi_T(u_n^* T u_n)$, entonces

$$w_n^* T w_n = \pi_T(w_n^*) = \pi_T(\varphi_T(u_n^* T u_n)) = u_n^* T u_n \quad \forall\, n$$

Por otro lado, la norma de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ define sobre este una métrica, y por tanto el concepto de continuidad es equivalente a la continuidad sucesional. Es así que la continuidad de φ_T implica lo siguiente:

$$w_n^* = \varphi_T(u_n^* T u_n) \to \ \varphi_T(T) = 1$$

Por lo tanto se tiene que $w_n \to 1$ $\square$

4. LA ESTRUCTURA DE OPERADORES QUE SATISFACEN LA PROPIEDAD (P)

Presentaremos algunas características de los operadores que satisfacen la propiedad de levantamiento sucesional unitario (P). Estos resultados fueron desarrollados por L.A. Fialkow. Los detalles pueden consultarse en [5].

4.1 Lema

Sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, las siguientes propiedades son equivalentes:

(P1) : Dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $s \in \mathcal{U}(T)$ con $\|s - T\| < \delta$, entonces existe $w \in \mathcal{U}$ tal que $\|w - 1\| < \epsilon$ y además $w^* T w = s$.

(P2) : T satisface (P).

(P3) : (Propiedad de levantamiento de subsucesiones)
Si $\{u_n\} \subseteq \mathcal{U}$ con $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n^* T u_n - T\| = 0$, entonces existen subsucesiones $\{u_{n_k}\}_k \subseteq \{u_n\}$ y $\{w_k\} \subseteq \mathcal{U}$ tal que: $\lim\limits_{k\to\infty} \|w_k - 1\| = 0$ y $w_k^* T w_k = u_{n_k}^* T u_{n_k}$ para todo k.

DEMOSTRACIÓN:

1. $(P1)$ implica $(P2)$: Sea $\{u_n\} \subseteq \mathcal{U}$ con $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n^* T u_n - T\| = 0$, se trata de encontrar $\{w_n\} \subseteq \mathcal{U}$ tal que $w_n \to 1$ y $w_n^* T w_n = u_n^* T u_n$ para todo n.

   Asumiendo la validez de (P1) tenemos: Dado $\epsilon = 1$, existe $\delta_1 > 0$ tal que si $s_1 \in \mathcal{U}(T)$ y $\|s_1 - T\| < \delta_1$, existe $w_1 \in \mathcal{U}$ tal que $\|w_1 - 1\| < 1$ y $s_1 = w_1^* T w_1$.

   Sea $\epsilon = \frac{1}{2}$, entonces existe $\delta_2 > 0$ tal que si $s_2 \in \mathcal{U}(T)$ y $\|s_2 - T\| < \delta_2$ existe $w_2 \in \mathcal{U}$ tal que $\|w_1 - 1\| < 1$ y $s_2 = w_2^* T w_2$.

   Sin pérdida de generalidad podemos escoger $\delta_2 < \delta_1$. Con base en estos dos resultados se puede afirmar por inducción que para cada entero $k > 0$ correspondiendo a $\epsilon = \frac{1}{k}$ existe $\delta_k > 0$ tal que se satisface (P1). Esto es, si $s_k \in \mathcal{U}(T)$ y $\|s_k - T\| < \delta_k$, entonces existe $w_k \in \mathcal{U}$ tal que $\|w_k - 1\| < \frac{1}{k}$ y $s_k = w_k^* T w_k$. Nuevamente podemos escoger $\delta_k < \delta_{k-1} < \cdots < \delta_2 < \delta_1$.

   Por otro lado, para $\delta_1 > 0$ existe $n_0(1) \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0(1)$ se tiene que $\|u_n^* T u_n - T\| < \delta_1$. Iteradamente, para $\delta_k > 0$ existe $n_0(k) \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0(k)$ se verifica que $\|u_n^* T u_n - T\| < \delta_k$.

   Como $\delta_{k+1} < \delta_k < \delta_{k-1} < \cdots < \delta_2 < \delta_1$, podemos asumir también, sin perder generalidad, que: $n_0(k+1) > n_0(k) > \cdots > n_0(1) \quad \forall k$.

   Entonces, para $n \geq n_0(k)$ existe $w_{n,k} \in \mathcal{U}$ tal que $\|w_{n,k} - 1\| < \frac{1}{k}$ y además $w_{n,k}^* T w_{n,k} = u_n^* T u_n$ (hemos usado aquí (P1) para $s = u_n^* T u_n$).

   Para cada entero $n \geq n_0(1)$ denotemos con $k(n)$ el único entero tal que: $n_0(k(n)) \leq n < n_0(k(n)+1)$ y definamos

$$\begin{array}{lcll} w_n & := & w_{n,k(n)} & \text{para} \quad n \geq n_0(1) \\ w_n & := & u_n & \text{para} \quad n < n_0(1) \end{array}$$

Así, se tiene que: $\|w_n - 1\| = \|w_{n,k(n)} - 1\| < \frac{1}{k(n)} \to 0$ cuando $n \to \infty$, ya que si $n \to \infty$ se tiene que $k(n) \to \infty$ y además $w_n^* T w_n = u_n^* T u_n$.

2. $(P2)$ implica $(P3)$: Evidente.

3. $(P3)$ implica $(P1)$: Para demostrarlo supondremos que se cumple (P3) y que no se cumple (P1), $\neg(P1)$ podemos expresarla de manera equivalente por:

   Existe $\epsilon > 0$ tal que $\forall\ \delta > 0$ existe $s \in \mathcal{U}(T)$ con $\|s - T\| < \delta$ tal que no existe ningun $w \in \mathcal{U}$ tal que $\|w - 1\| < \epsilon$ y $w^* T w = s$. Entonces, supongamos que existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $\delta_n = \frac{1}{n}$ existe $s_n \in \mathcal{U}(T)$ con $\|s_n - T\| < \delta_n$ tal que no existe $w_n \in \mathcal{U}$ tal que $\|w_n - 1\| < \epsilon$ y $w_n^* T w_n = s_n$.

   Sea $\{s_n\} \subseteq \mathcal{U}(T)$ tal que $s_n \to T$, entonces existe $\{s_{n_k}\}_k \subseteq \{s_n\}$ y existe $\{w_k\} \subseteq \mathcal{U}$ tal que $w_k \to 1$ y $w_k^* T w_k = s_{n_k}$ $\forall\ k$. Ahora, para este mismo $\epsilon > 0$ existe $n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq n_0(\epsilon)$ se verifica que $\|w_k - 1\| < \epsilon$. Entonces, todos los s_{n_k} junto con los w_k son contraejemplos a $\neg(P1)$. $\square$

La siguiente proposición permite establecer relación entre la propiedad (P) y la cerradura de la órbita unitaria de un operador $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

4.1 Proposición

Sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, si T satisface la propiedad (P), entonces $\mathcal{U}(T)$ es cerrada en la norma de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

DEMOSTRACIÓN:

Supongamos que T satisface la propiedad (P), sabemos que (P) es equivalente a (P1), entonces, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $u \in \mathcal{U}$ y $\|u^* T u - T\| < \delta$ entonces existe $w \in \mathcal{U}$ tal que $\|w - 1\| < \epsilon$, y además $w^* T w = u^* T u$.

Así, para $\epsilon = \frac{1}{2^n}$ existe $\delta_n > 0$ tal que si $u \in \mathcal{U}$ y $\|u^* T u - T\| < \delta_n$, entonces existe $w \in \mathcal{U}$ tal que $\|w - 1\| < \frac{1}{2^n}$, y además se verifica que $w^* T w = u^* T u$.

Sea ahora $y \in \mathcal{U}(T)^-$, entonces existe $\{u_k\}_k \subseteq \mathcal{U}$ tal que $u_k^* T u_k \to y$. Para $n > 0$ existe $k_n > 0$ tal que si $k \geq k_n$ se tiene que: $\|u_k^* T u_k - y\| < \frac{\delta_n}{2}$ (Sin pérdida de generalidad se puede suponer que $k_{n+1} > k_n > \cdots > k_2 > k_1$)

Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, dado que $k_{n+1} > k_n$, se tiene:

$$\begin{aligned}
\|u_{k_{n+1}}^* T\, u_{k_{n+1}} - u_{k_n}^* T\, u_{k_n}\| &= \|u_{k_{n+1}}^* T\, u_{k_{n+1}} - y + y - u_{k_n}^* T\, u_{k_n}\| \\
&\leq \|u_{k_{n+1}}^* T\, u_{k_{n+1}} - y\| + \|u_{k_n}^* T\, u_{k_n} - y\| \\
&< \frac{\delta_n}{2} + \frac{\delta_n}{2} = \delta_n
\end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned}
\|u_{k_{n+1}}^* T\, u_{k_{n+1}} - u_{k_n}^* T\, u_{k_n}\| &= \|u_{k_n}^* (u_{k_n} u_{k_{n+1}}^* T\, u_{k_{n+1}} - T\, u_{k_n})\| \\
&= \|u_{k_n}^* (u_{k_n} u_{k_{n+1}}^* T\, u_{k_{n+1}} u_{k_n}^* - T) u_{k_n}\| \\
&= \underbrace{\|u_{k_n}^*\|}_{=1} \|u_{k_n} u_{k_{n+1}}^* T\, u_{k_{n+1}} u_{k_n}^* - T\| \underbrace{\|u_{k_n}\|}_{=1} \\
&= \|u_{k_n} u_{k_{n+1}}^* T\, u_{k_{n+1}} u_{k_n}^* - T\| < \delta_n
\end{aligned}$$

Así, aplicando (P1) existe $\{w_n\} \subseteq \mathcal{U}$ tal que $\|w_n - 1\| < \frac{1}{2^n}$, y además

$$w_n^* T w_n = u_{k_n} u_{k_{n+1}}^* T\, u_{k_{n+1}} u_{k_n}^* \tag{12}$$

Definamos ahora $v_n := u_{k_n}^* w_n u_{k_n}$ para todo n, entonces:

$$\begin{aligned}
\|v_n - 1\| &= \|u_{k_n}^* w_n u_{k_n} - 1\| \\
&= \|u_{k_n}^* (w_n u_{k_n} - u_{k_n})\| \\
&= \|u_{k_n}^* (w_n - 1) u_{k_n}\| \\
&= \|w_n - 1\| \\
&< \frac{1}{2^n}
\end{aligned}$$

Además, se tiene que $v_n^* := u_{k_n}^* w_n^* u_{k_n}$, entonces:

$$\begin{aligned}
v_n^* u_{k_n}^* T\, u_{k_n} v_n &= u_{k_n}^* w_n^* \underbrace{u_{k_n} u_{k_n}^*}_{=1} T \underbrace{u_{k_n} u_{k_n}^*}_{=1} w_n u_{k_n} \\
&= u_{k_n}^* \underbrace{w_n^* T w_n}_{ver(12)} u_{k_n} \\
&= u_{k_n}^* u_{k_n} u_{k_{n+1}}^* T\, u_{k_{n+1}} u_{k_n}^* u_{k_n} \\
&= u_{k_{n+1}}^* T\, u_{k_{n+1}}
\end{aligned}$$

Por sustitución repetida tenemos:

$$u_{k_{n+1}}^* T\, u_{k_{n+1}} = v_n^* \cdot v_{n-1}^* \cdots \underbrace{v_2^* \cdot \underbrace{v_1^* \cdot u_{k_1}^* \cdot T \cdot u_{k_1} \cdot v_1}_{u_{k_2}^*\, T\, u_{k_2}} \cdot v_2}_{u_{k_3}^*\, T\, u_{k_3}} \cdots v_{n-1} \cdot v_n$$

Dado que $v_n = 1 + (v_n - 1)$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \|v_n - 1\| < \infty$, se tiene que

$$v = \prod_{n=1}^{\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} (v_1 v_2 \cdots v_n)$$

es convergente en la norma de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, además v es unitario. Puede consultarse [2], página 213, entonces:

$$\begin{aligned} y &= \lim_{n\to\infty} (u_{k_{n+1}}^* T\, u_{k_{n+1}}) \\ &= \lim_{n\to\infty} (v_n^* \cdot v_{n-1}^* \cdots v_2^* \cdot v_1^*) u_{k_1}^* T\, u_{k_1} (v_1 \cdot v_2 \cdots v_{n-1} \cdot v_n) \\ &= v^* u_{k_1}^* T\, u_{k_1} v \end{aligned}$$

Esto es, $y = (u_{k_1} v)^* T\, (u_{k_1} v)$, entonces se tiene que $y \in \mathcal{U}(T)$, lo cual permite concluir que $\mathcal{U}(T)^- = \mathcal{U}(T)$ y se tiene la cerradura de $\mathcal{U}(T)$ en la norma de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. $\square$

5. $\mathcal{U}(T)$ Y LA DIMENSIÓN DE $C^*(T)$

En esta sección, ρ denotará la representación idéntica de $C^*(T)$ sobre $\mathcal{H}$, esto es: $\rho(x) = x$ para todo $x \in C^*(T)$. Establecemos, ahora, una conexión entre la información topológica de $\mathcal{U}(T)$ (la cerradura) y la información de tipo algebraica ($C^*(T)$ es de dimensión finita).

5.1 Proposición

Sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Si $T_1 \in \mathcal{U}(T)^-$, entonces existe una única representación ρ_1 de $C^*(T)$ sobre $\mathcal{H}$ tal que $\rho_1(T) = T_1$.

DEMOSTRACIÓN:

1. Unicidad: Supongamos que ρ_1 y ρ_2 son representaciones de $C^*(T)$ sobre $\mathcal{H}$ tales que $\rho_1(T) = \rho_2(T) = T_1$, también se verifica que $\rho_1(1) = \rho_2(1) = I_{\mathcal{H}}$.

Por otro lado, $\rho_1(T^*) = \rho_1(T)^* = T_1^* = \rho_2(T^*)$, entonces como ρ_1 y ρ_2 coinciden sobre los generadores de $C^*(T)$, se tiene que $\rho_1 = \rho_2$.

2. Existencia: Dado que $T_1 \in \mathcal{U}(T)^-$, entonces existe $\{u_k\} \subseteq \mathcal{U}$ tal que $u_k^* T\, u_k \to T_1$. Para $a \in C^*(T)$ definimos

$$\rho_1(a) := \lim_{k\to\infty} u_k^* a u_k = \lim_{k\to\infty} u_k^* \rho(a) u_k$$

Evidentemente, $\rho_1(a)$ existe para $a = T,\ a = 1$ y para $a = T^*$. Esta última es consecuencia de la continuidad de la involución. Lo anterior puede extenderse linealmente como homomorfismo de álgebras a $C^*(T)$ de manera continua. $\square$

Verifiquemos ahora que $\rho_1 \sim_a \rho$, el hecho de que $T_1 \in \mathcal{U}(T)^-$ implica que existe una sucesión $\{u_k\}$ en el grupo unitario tal que la sucesión $\{u_k^* T u_k\}$ contenida en la órbita uniatria de T converge a T_1, además:

$$\lim_{k\to\infty} u_k^*\, T\, u_k = \lim_{k\to\infty} u_k^*\, \rho(T)\, u_k = T_1 = \rho_1(T)$$

entonces por la continuidad de la norma se tiene que

$$\lim_{k\to\infty} \| u_k^*\, \rho(T)\, u_k - \rho_1(T) \| = 0$$

Aplicando el teorema 2.1 se tiene que $\rho_1 \sim_a \rho$.

Recíprocamente, supongamos que $\rho_1 \sim_a \rho$, y verifiquemos que $T_1 = \rho_1(T)$ está en $\mathcal{U}(T)^-$. En efecto, si $\rho_1 \sim_a \rho$, existe $\{u_k\} \subseteq \mathcal{U}$ tal que la sucesión $\{u_k^* \rho(a) u_k\}$ converge a $\rho_1(a)$ para todo $a \in C^*(T)$.

En particular, si tomamos $a = T$, se tiene que

$$T_1 = \rho_1(T) = \lim_{k\to\infty} u_k^*\, \rho(T) u_k = \lim_{k\to\infty} u_k^*\, T\, u_k$$

lo cual demuestra que $T_1 \in \mathcal{U}(T)^-$.

Podemos afirmar entonces que existe una correspondencia uno a uno entre el conjunto de todas las representaciones ρ_1 de $C^*(T)$ en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ que son aproximadamente equivalentes a ρ y la clausura de la órbita unitaria de T.

Esta es:

$$\rho_1 \longmapsto \rho_1(T)$$

El siguiente teorema es central y fue desarrollado por D. Voiuculescu. Para mayores detalles puede verse [12].

5.1 Teorema

Sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, la órbita unitaria de T es cerrada en la norma de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ si y sólo si $C^*(T)$ es de dimensión finita.

DEMOSTRACIÓN:

1. Supongamos que $\mathcal{U}(T)$ es cerrada en la norma de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Hay que demostrar que cada representación $\rho_1 : C^*(T) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ con $\rho_1 \sim_a \rho$ satisface $\rho_1 \sim \rho$.

   Supongamos que $\rho_1 \sim_a \rho$ y definamos $T_1 := \rho_1(T) \in \mathcal{U}(T)^-$, por hipótesis $\mathcal{U}(T)^- = \mathcal{U}(T)$, entonces, $T_1 = w^*Tw$ para algún $w \in \mathcal{U}$, entonces, la representación $\widetilde{\rho}_1 : C^*(T) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ definida por $\widetilde{\rho}_1(X) = w^*Xw$ satisface también la proposición 5.1, entonces $\widetilde{\rho}_1 \sim \rho$, por lo tanto $\rho_1 \sim \rho$. Si usamos el teorema 2.2 podemos concluir que $C^*(T)$ es de dimensión finita.

   Nota: Puede suceder que ρ_1 sea una representación de $C^*(T)$ sobre un espacio de Hilbert $\widetilde{\mathcal{H}} \neq \mathcal{H}$, digamos: $\widetilde{\rho}_1 : C^*(T) \longrightarrow \mathcal{L}(\widetilde{\mathcal{H}})$

   Es importante anotar que como $\dim \mathcal{H} = \dim \widetilde{\mathcal{H}}$, se tiene que $\mathcal{H}$ y $\widetilde{\mathcal{H}}$ son isomorfos, es decir, existe un isomorfismo $w : \mathcal{H} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{H}}$. Definamos entonces:

$$\mathcal{L}(\widetilde{\mathcal{H}}) \ni B \overset{\Phi}{\longmapsto} w^*Bw \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \tag{13}$$

   y consideramos $\rho_1 := \Phi \circ \widetilde{\rho}_1 : C^*(T) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$, como se muestra en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} C^*(T) \arrow[r, "\widetilde{\rho}_1"] \arrow[dr, "\Phi\circ\widetilde{\rho}_1"'] & \mathcal{L}(\widetilde{\mathcal{H}}) \arrow[d, "\Phi"] \\ & \mathcal{L}(\mathcal{H}) \end{tikzcd}$$

Afirmamos ahora que si $\widetilde{\rho}_1 \sim_a \rho$, entonces $\rho_1 \sim_a \rho$. En efecto, supongamos que $\widetilde{\rho}_1 \sim_a \rho$, entonces existe una sucesión de operadores unitarios $u_k : \mathcal{H} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{H}}$ tal que $\widetilde{\rho}_1(a) = \lim\limits_{k\to\infty} u_k^*\rho(a)u_k$ para todo $a \in C^*(T)$, entonces:

$$\rho_1(a) = w^*\widetilde{\rho}_1(a)w = \lim_{k\to\infty}(w^*u_k^*\rho(a)u_k w) = \lim_{k\to\infty}(u_k w)^*\rho(a)(u_k w)$$

Podemos concluir que $\rho_1 \sim_a \rho$ a través de los operadores unitarios $\{u_k^* w\}$, se sigue además que $\rho_1 \sim \rho$, por lo tanto existe un operador $u : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ tal que $\rho_1(a) = u^*\rho(a)u$ para todo $a \in C^*(T)$. Ahora

$$\widetilde{\rho}_1(a) = w\widetilde{\rho}_1(a)w^* = wu^*\rho(a)uw^* = (uw^*)^*\rho(a)(uw^*) \quad \forall a \in C^*(T)$$

Es decir, $\widetilde{\rho}_1 \sim \rho$ usando el operador unitario $wu^* : \mathcal{H} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{H}}$.

2. Supóngase ahora que $C^*(T)$ es de dimensión finita, tenemos que demostrar que $\mathcal{U}(T)$ coincide con su clausura. Sea $T_1 \in \mathcal{U}(T)^-$, entonces existe una representación ρ_1 de $C^*(T)$ sobre $\mathcal{H}$ tal que $\rho_1(T) = T_1$ y $\rho_1 \sim_a \rho$.

   Aplicando el teorema 2.2 se tiene que $\rho_1 \sim \rho$, es decir, existe un operador u en el grupo unitario tal que $u^*au = \rho_1(a)$ para todo $a \in C^*(T)$, en particular, para $a = T$ se tiene que $u^*Tu = \rho_1(T) = T_1$, entonces $T_1 \in \mathcal{U}(T)$. $\square$

6. LA DIMENSIÓN DE $C^*(T)$ Y LA EXISTENCIA DE SECCIONES LOCALES

Ahora nuestro objetivo es el siguiente: Dado un operador (fijo) $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, con $C^*(T)$ de dimensión finita, mostrar que existe una sección local continua unitaria para T.

Sin embargo, en la construcción de una sección local continua para T aparecen dos conceptos importantes: operadores positivos y descomposición polar de un operador. Los enunciamos a continuación.

6.1 Definición

Sea $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, se dice que P es positivo $(P \geq 0)$ si y sólo si $\langle Px, x\rangle \geq 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$ o equivalentemente $P = P^*$ y $\sigma(P) \subseteq [0, \infty[$.

En el sistema de los números complejos se verifica lo siguiente: dado $z \in \mathbb{C}$, éste puede ser factorizado en la forma $z = |z|k$ donde $|k| = 1$. Esto sugiere examinar el problema de factorizar un elemento $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ en la forma $A = UP$ con U unitario y P positivo.

Cuando esto es posible, llamamos a UP una descomposición polar de A.

6.1 Lema

Si $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ es invertible, entonces A tiene una única descomposición polar $A = UP$.

DEMOSTRACIÓN:
Ver **operadores positivos y raíces cuadradas** en [11], página 330. □

Otro resultado importante y además evidente es que si $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ es invertible también lo son A^* y A^*A.

En este contexto de los operadores invertibles existe una fórmula para la descomposición polar de A. Esto es, se pueden expresar U y P en términos de A. En efecto, dado $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ invertible, se garantiza la existencia de $(A^*A)^{-1}$ y $(A^*A)^{-\frac{1}{2}}$, entonces

$$A = \underbrace{A\,(A^*A)^{-\frac{1}{2}}}_{=:U} \cdot \underbrace{(A^*A)^{\frac{1}{2}}}_{=P} \tag{14}$$

Por la definición de raíz positiva se tiene que P es un operador positivo. Verifiquemos que U es unitario.

$$U^*U = (A^*A)^{-\frac{1}{2}}\, A^*A\,(A^*A)^{-\frac{1}{2}} = I_{\mathcal{H}}$$

$$UU^* = A\,(A^*A)^{-\frac{1}{2}}\,(A^*A)^{-\frac{1}{2}}\,A^* = I_{\mathcal{H}}$$

El lema que enunciamos y demostramos ahora nos permite caracterizar el estabilizador de un elemento $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ para el cual $C^*(T)$ es de dimensión finita.

6.2 Lema

Sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tal que $C^*(T)$ sea de dimensión finita,

$$\mathcal{H} = \left(\mathcal{K}_1^{(1)} \oplus \cdots \oplus \mathcal{K}_{n_1}^{(1)}\right) \oplus \cdots \oplus \left(\mathcal{K}_1^{(p)} \oplus \cdots \oplus \mathcal{K}_{n_p}^{(p)}\right) \tag{15}$$

denotemos con $e_{kk}^{(i)}$ los idempotentes, ortogonales definidos sobre $\mathcal{K}_k^{(i)}$ y con e_k los idempotentes, ortogonales definidos sobre $\mathcal{F}_k = \mathcal{K}_1^{(k)} \oplus \cdots \oplus \mathcal{K}_{n_k}^{(k)}$, entonces $w \in \mathcal{U}$ satisface $wT = Tw$ si y sólo si w es diagonal al respecto de la descomposición canónica (15) y se verifica además que

$$e_{kk}^{(i)} w e_{kk}^{(i)} = e_{kj}^{(i)} \left(e_{jj}^{(i)} w e_{jj}^{(i)} \right) e_{jk}^{(i)}$$

DEMOSTRACIÓN:
Ver [9], lema (3.4.2) □

El siguiente teorema fue desarrollado por D. Deckard y L.A. Fialkow y muestra una construcción de la sección local continua para un operador $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ que satisface las condiciones expuestas al principio de esta sección.

6.1 Teorema

Si $C^*(T)$ es de dimensión finita, entonces T tiene una sección local continua.

DEMOSTRACIÓN:
Ver [9] teorema (3.4.3) □

Referencias

[1] BERBERIAN, STERLING, *Lectures in Functional Analysis and Operator Theory.* Springer-Verlag. Berlín, 1974. GTM N^o 15.

[2] BOURBAKI, NIKOLAS, *Elements of Mathematics, Genaral Topology, Part II.* Addison-Wesley, 1966.

[3] DECKARD, D. FIALKOW, L.A., *Characterization of Hilbert Space Operators with Unitary Cross Sections.* J. Operator Theory, 2(1979), 153-158.

[4] DIXMIER, JACQUES, *Les C^*-algébres et leurs représentations.* París, Gauthier-Villars, 1969.

[5] FIALKOW, L.A., *A note on limits of unitarily equivalent operators.* Trans. Amer. Math. Soc, 232(1977), 205-220.

[6] FIALKOW, L.A., *A note on unitary cross sections for operators.* Canad. J. Math, Vol XXX, N^o 6, 1978, pp. 1215-1227.

[7] FIALKOW, L.A., *Similarity cross sections for operators.* Indiana univ. Math. J. 28 (1979).

[8] GOODEARL, K.G., *Notes on Real and Complex C^*-álgebras.* Shiva Publ limited England, 1982.

[9] GUTIÉRREZ, ISMAEL, *Caracterización de Operadores sobre espacios de Hilbert con secciones locales continuas.* Tesis de Maestría. Universidad del Valle - Universidad del Norte, 1998.

[10] HALMOS, PAUL R., *Introduction to Hilbert Space and the Theory of Spectral Multiplicity.* New York, Chelsea Publishing Company, 1951.

[11] RUDIN, WALTER, *Functional Analysis.* New York, MacGraw-Hill, 1973.

[12] VOICULESCU, D., *A non commutative Weyl-Von Neumann theorem.* Rev. Roum. Math. Pures et Appl. 1976, XXI, 97-113.