

Modelo bifásico no-lineal de elementos finitos para el análisis mecánico de tejidos biológicos*

Parte I: Formulación teórica

José Jaime García** y Daniel Humberto Cortés***

Resumen

Se presenta un modelo no lineal de elementos finitos para simular el comportamiento mecánico de tejidos biológicos bifásicos o poroelásticos, los cuales están compuestos de una fase sólida y un fluido. El modelo considera deformaciones finitas, permite describir la fase sólida como hiperelástica o hipoeelástica y tiene la opción de definir una variación no lineal de la permeabilidad. En esta primera parte se presenta la formulación teórica y la descripción de las ecuaciones que representan el modelo. La segunda parte consiste en la implementación de las ecuaciones mediante el método de los elementos finitos y la validación de los resultados.

Palabras claves: Poroelasticidad, materiales bifásicos, tejidos biológicos, bioingeniería.

Abstract

A nonlinear model of finite elements to simulate the mechanical behavior of biphasic or poroelastic biologic tissues, which are made up of a solid phase and a fluid, is presented. The model considers finite deformations, permits to describe the solid phase as hiperelastic or hipoeelastic, and has the option of defining a nonlinear variation of the permeability. In this first part, it is presented the theoretical formulation and the description of the equations representing the model. The second part consists of the implementation of equations through the finite element method and validation of results.

Key words: Poroelasticity, biphasic materials, biologic tissues, bioengineering.

Fecha de recepción: 20 de mayo de 2005
Fecha de aceptación: 11 de mayo de 2006

* Este trabajo ha sido posible gracias al apoyo que la Vicerrectoría de Investigaciones de la Universidad del Valle ha brindado al Grupo de Biomecánica de esta institución.

** Escuela de Ingeniería Civil y Geomática, Universidad del Valle. josejgar@univalle.edu.co

*** Escuela de Ingeniería Mecánica, Universidad del Valle.

Dirección: Universidad del Valle – Sede Meléndez, Calle 13 # 100-00 Edificio 351, Cali (Colombia).

1. INTRODUCCIÓN

Los tejidos biológicos como los tendones, el cartílago articular y las arterias están constituidos por una fase sólida y un fluido. El fluido juega un papel importante en las actividades fisiológicas, como el transporte de desechos y alimentación, al igual que en el comportamiento mecánico del tejido [1]. La simulación del comportamiento mecánico de los tejidos biológicos es necesaria cuando se desea investigar sobre la etiología de las enfermedades o diseñar dispositivos para tratamientos. Si se desea hacer una adecuada simulación mecánica de un tejido biológico, debe considerarse la acción combinada de la fase sólida y del fluido [2].

La poroelasticidad es la disciplina que predice el comportamiento mecánico de un material considerando la acción simultánea del fluido y la fase sólida. Sus primeros desarrollos se deben a los estudios que realizaron los profesores Terzaghi y Fillunger en la Universidad de Viena, en 1920-1930 [3], para solucionar problemas de mecánica de suelos. Luego, Biot [4] presentó el planteamiento del problema de consolidación tridimensional e hizo la extensión para medios anisótropos [5]. En el área de la biomecánica se empezaron a aplicar las teorías poroelásticas desde 1980 para explicar el comportamiento mecánico del cartílago articular [2], y al material poroelástico se le denominó material bifásico.

Para simular el comportamiento de tejidos biológicos, nuestro grupo presentó, en un trabajo previo [6], un modelo bifásico de elementos finitos que considera deformaciones infinitesimales y efectos anisótropos. Durante su funcionamiento, los tejidos biológicos se ven sometidos a deformaciones grandes, presentan una variación no lineal de la permeabilidad y un comportamiento no lineal de la fase sólida [7]. Ejemplo de ello es la tendencia de los tendones de aumentar su rigidez con el aumento de la deformación debido al reacomodo geométrico de las fibras [8]. Además, la fase sólida de estos tejidos se caracteriza por su anisotropía y heterogeneidad [9,10], lo cual aumenta la dificultad para obtener soluciones analíticas. Por tanto, es necesario implementar soluciones numéricas mediante el método de los elementos finitos para el análisis del comportamiento mecánico de tejidos biológicos [11,12]. Los programas comerciales generalmente no tienen incorporada la alternativa poroelástica, y aquellos que sí la tienen, como ABAQUS (*Karlsson and Sorenson, INC., Pawtucket, USA*) y Marc (*MSC Software Corporation, Santa Ana, USA*), son muy costosos y no permiten incorporar opciones que se acomoden a las necesidades del usuario.

En esta primera parte se presenta la formulación teórica de un modelo no lineal de elementos finitos para describir el comportamiento mecánico de materiales bifásicos. El modelo permite considerar deformaciones finitas, una permeabilidad dependiente de la deformación y un comportamiento no lineal de la fase sólida. Las ecuaciones diferenciales que describen el modelo se presentan en términos de las tres velocidades de la fase sólida y la presión de poros. Dado que la hipoelasticidad es una formulación elástica más general que la hiperelasticidad [13], en el modelo presentado aquí se incluyeron, además de dos opciones para modelar materiales hiperelásticos, una ecuación constitutiva para un material hipoelástico.

2. MÉTODOS

2.1. Planteamiento de las ecuaciones

Un material bifásico está compuesto por una fase sólida porosa y un fluido intersticial. Cuando el fluido llena totalmente los poros, se dice que el material está saturado, tal como ocurre con los tejidos biológicos. Debido a la dificultad para conocer la microestructura de la fase sólida y hacer su descripción matemática, se utilizan los métodos de la mecánica del medio continuo para hacer una descripción macroscópica basada en promedios. A continuación se presentan las ecuaciones, documentadas por varios investigadores [14,15], que describen el comportamiento mecánico de un material bifásico.

En el planteamiento de las ecuaciones se utiliza la convención del índice repetido y la notación de la coma, para indicar derivadas parciales respecto a las coordenadas espaciales o Eulerianas x_k , las cuales identifican puntos en el espacio. En la descripción macroscópica de un material poroelástico se considera que el volumen está simultáneamente ocupado por la fase sólida y el fluido. Bajo este modelo, el tensor de esfuerzos de Cauchy es igual a la suma de los esfuerzos en la fase sólida $\sigma_k^{(s)}$ y los esfuerzos en el fluido $\sigma_k^{(f)}$, los cuales representan promedios ponderados sobre el volumen total. El promedio se establece de acuerdo con las fracciones de volumen $\phi^{(s)}$ y $\phi^{(f)}$, las cuales son iguales a las relaciones entre el volumen del sólido y el volumen total y el volumen del fluido y el volumen total respectivamente. Por otra parte, la presión de poros p representa la presión real del fluido, y los esfuerzos efectivos σ_k representan la parte del esfuerzo susceptible a deformaciones, principio que fue reconocido por Terzaghi (citado en [3]), quien afirmó que en un material poroso todos los efectos de cambio de esfuerzo, como la compresión, la distorsión y la resistencia al cortante,

se debían exclusivamente a los cambios de los esfuerzos efectivos. Estos esfuerzos efectivos son frecuentemente utilizados en la mecánica de suelos para predecir la falla. Para un medio poroelástico compuesto de partículas, los esfuerzos efectivos son proporcionales a los esfuerzos de contacto entre las partículas. Con base en lo anterior, se pueden establecer las siguientes ecuaciones que relacionan los esfuerzos efectivos, la presión de poros y los esfuerzos promedio en las fases sólida y el fluido.

$$\sigma_{ik}^{(s)} = -\phi^{(s)} p \delta_{ik} + \sigma_{ik} \quad (1)$$

$$\sigma_{ik}^{(f)} = -\phi^{(f)} p \delta_{ik} \quad (2)$$

donde δ_{ik} es el delta de Kronecker o tensor sustitución.

En el estudio de los tejidos biológicos como el cartílago articular las cargas externas son significativamente mayores que las ocasionadas por efectos inerciales que se deben a la masa del tejido. Por tanto, el problema se plantea en términos de las ecuaciones de equilibrio para las fases sólida y el fluido como se presenta a continuación:

$$\sigma_{ik,k}^{(s)} + K(v_i^{(f)} - v_i^{(s)}) + p\phi_{,i}^{(s)} = 0 \quad (3)$$

$$\sigma_{ik,k}^{(f)} + K(v_i^{(f)} - v_i^{(s)}) - p\phi_{,i}^{(s)} = 0 \quad (4)$$

donde K es un coeficiente de arrastre que permite expresar las fuerzas de interacción entre las fases que se deben a la diferencia entre la velocidad del fluido $v_i^{(f)}$ y la velocidad del sólido, $v_i^{(s)}$. El tercer término en las ecuaciones (3) y (4) obedece a los cambios espaciales de la fracción de volumen del sólido que se deben a deformaciones grandes.

Si se suman las ecuaciones (3) y (4) y se substituyen las ecuaciones (1) y (2), las ecuaciones de equilibrio quedan expresadas en términos de los esfuerzos efectivos y la presión de poros, así:

$$\sigma_{ik,k} - p_{,i} = 0 \quad (5)$$

Los cambios de volumen de un material poroelástico se deben esencialmente a la salida del fluido del tejido. Por tanto, una hipótesis razonable es considerar

la fase sólida y el fluido como intrínsecamente incompresibles. Si se acepta esta hipótesis, la ecuación de continuidad se expresa así:

$$[\phi^{(s)}v_i^{(s)} + \phi^{(f)}v_i^{(f)}]_{,i} = 0 \quad (6)$$

Esta ecuación es similar a la utilizada cuando se plantea la condición de incompresibilidad de un medio continuo de un solo material, la cual equivale a expresar que la divergencia de la velocidad es cero. Se podría considerar que la cantidad que aparece entre corchetes en la ecuación (6) es una velocidad efectiva, ponderada de acuerdo con las fracciones de volumen.

Para obtener la formulación con base en la velocidad de la fase sólida y la presión de poros, se debe eliminar de la ecuación de continuidad la velocidad del fluido, como se explica a continuación. Si se diferencia la ecuación (2) con respecto a la coordenada espacial x_k se obtiene:

$$\sigma_{ik,k}^{(f)} = -\phi_{,i}^{(f)} p - \phi^{(f)} p_{,i} \quad (7)$$

Luego se despeja de la ecuación (4) la velocidad del fluido, y en el resultado se substituye la ecuación (7) para obtener:

$$v_i^{(f)} = v_i^{(s)} - p_{,i} \phi^{(f)} / K - p(\phi_{,i}^{(f)} + \phi^{(s)})_{,i} / K \quad (8)$$

Debido a que el material está saturado, la suma de las fracciones de volumen es igual a uno y su derivada es igual a cero, por tanto, la ecuación (8) se reduce a:

$$v_i^{(f)} = v_i^{(s)} - p_{,i} \phi^{(f)} / K, \quad (9)$$

la cual se puede considerar equivalente a la ley de Darcy, que indica que el gradiente de presiones es proporcional a la diferencia de velocidades.

El reemplazo de la ecuación (9) en la ecuación de continuidad da como resultado:

$$v_{i,i}^{(s)} [k p_{,i}]_{,i} = 0, \quad (10)$$

donde k es la permeabilidad del tejido, definida en términos del coeficiente de arrastre K , como:

$$k = \frac{(\phi^{(f)})^2}{K} \quad (11)$$

El modelo se puede plantear en términos de las tres ecuaciones (5) y la ecuación (10), en las que las incógnitas son las tres componentes de la velocidad del sólido y la presión de poros. Para solucionar estas ecuaciones debe plantearse, además, una ecuación constitutiva para la fase sólida.

Cuando se consideran grandes deformaciones, las fracciones de volumen pueden variar significativamente. Por consiguiente, en este modelo se consideró la siguiente variación de las fracciones de volumen y la permeabilidad con la deformación [1]:

$$\phi^{(s)} = \phi_0 / \sqrt{I_3}, \quad (12)$$

$$\phi^{(f)} = 1 - \phi_0 / \sqrt{I_3} \quad (13)$$

$$k = k_0 \left[\frac{\phi_0 \phi^{(f)}}{(1 - \phi_0) \phi^{(s)}} \right]^2 e^{\{M(I_3 - 1)/2\}}, \quad (14)$$

donde ϕ_0 y k_0 son la fracción de volumen del sólido y la permeabilidad del material cuando no se encuentra deformado; I_2 e I_3 son el segundo y tercer invariante, respectivamente, del tensor de deformación derecho de Cauchy-Green, y M es un parámetro del material.

Como ecuaciones constitutivas se consideraron dos correspondientes a materiales hiperelásticos y la otra correspondiente a un material hipoeelástico. Un material hiperelástico [17] está descrito en términos de una función de energía que acumula el trabajo que se hace sobre el material. Dada la función de energía, es posible calcular los esfuerzos con base en las derivadas de la función. La primera ecuación constitutiva considerada fue la nueva Hookeana, dada por la función de energía [18]:

$$W = \lambda_0 (\ln(J))^2 / 2 - \mu_0 \ln(J) - \mu_0 (I_1 - 3) / 2, \quad (14)$$

donde W es la función de energía elástica, λ_0 y μ_0 son constantes reales, J es el determinante del gradiente de deformación, e I_1 es el primer invariante del tensor derecho de Green.

La otra función de energía ha sido propuesta y utilizada para el modelamiento de tejidos biológicos [12] y está dada por la expresión:

$$W = \frac{\alpha_0 e^{\alpha_1(I_1-3) + \alpha_2(I_2-3)}}{I_3^n}, \quad (15)$$

donde $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ y n son parámetros elásticos, I_3 es el tercer invariante del tensor de deformación derecho de Green. Entre los parámetros elásticos se cumple que $n = \alpha_1 + 2\alpha_2$. La forma exponencial de esta función intenta describir el aumento de rigidez de los tejidos biológicos cuando aumenta la deformación.

En la ecuación constitutiva hipoelástica adoptada en este trabajo, la tasa de cambio Jaumman del tensor esfuerzo de Cauchy, contenida en el vector $\{\sigma^{\nabla}\}$, se relacionó con el tensor tasa de deformación contenido en el vector $\{D\}$, a través de los coeficientes hipoelásticos contenidos en la matriz $[H]$, de la siguiente forma:

$$\{\sigma^{\nabla}\} = [H]\{D\} \quad (16)$$

Se considera la tasa de cambio de Jaumman, ya que cumple con el principio de objetividad, exigido para que una ecuación constitutiva sea válida. El cumplimiento del principio de objetividad garantiza que dos personas que rotan una con respecto a la otra deben observar para el mismo material la misma ecuación constitutiva.

La tangente a la curva esfuerzo-deformación es variable, ya que depende de la deformación. Para el caso de deformación nula y para cada una de las ecuaciones constitutivas, es posible calcular el módulo de elasticidad E y el coeficiente de Poisson ν si se soluciona el problema de tracción simple y se calculan los límites:

$$E = \lim_{\lambda_1 \rightarrow 1} \frac{d\sigma_1}{d\lambda_1}, \quad (17)$$

$$\nu = \lim_{\lambda_1 \rightarrow 1} \frac{d\lambda_2}{d\lambda_1}, \quad (18)$$

donde σ_1, λ_1 y λ_2 son, respectivamente, el esfuerzo de Cauchy en la dirección de aplicación de la carga, la relación de alargamiento en la dirección de

aplicación de la carga y la relación de alargamiento transversal a la dirección de aplicación de la carga. Para el caso del modelo hiperelástico biológico, el módulo de elasticidad y el coeficiente Poisson se calcularon mediante las ecuaciones (17) y (18), lo que dio como resultado:

$$E=4\alpha_0(\alpha_1+\alpha_2)(1+\alpha_2/(\alpha_1+3\alpha_2)) \quad (19)$$

$$v=\alpha_2/(\alpha_1+3\alpha_2) \quad (20)$$

2.2. Condiciones de borde y condiciones iniciales

Para completar el planteamiento del problema es necesario establecer las condiciones de borde tanto en la fase sólida como en el fluido. Las condiciones de borde sobre la superficie S de la fase sólida se expresan especificando el vector de tracciones \hat{t}_i sobre una parte de la superficie (S_t), y los desplazamientos prescritos \hat{u}_i sobre la parte restante (S_u) (figura). De forma similar, para el fluido se puede especificar la presión del fluido \hat{p} sobre una parte de la superficie (S_p), y la componente normal del gradiente de presiones $\hat{p}_{,i}$ sobre la superficie restante (S_g) (figura, parte b). Generalmente en los análisis de tejidos biológicos este gradiente de presiones es cero, y ésta es la condición que se consideró en esta formulación, tal como se explica más adelante.

Como condiciones iniciales deben darse las componentes de la velocidad de la fase sólida y la presión de poros.

2.3. Formulación variacional

A continuación se presenta la formulación variacional débil mediante la cual se resuelven las ecuaciones (5) y (10). Esta formulación débil es un ingrediente esencial de los elementos finitos, ya que baja el requisito de continuidad para las funciones de interpolación. Adicionalmente, si las funciones de ponderación se escogen iguales a las funciones de forma, se obtienen matrices simétricas [18]. Se parte de un volumen de control V fijo en el espacio y se utiliza el denominado principio de la potencia virtual, mediante el cual se multiplican las ecuaciones de equilibrio por velocidades virtuales, como se explica a continuación.

Mediante sendas multiplicaciones de las ecuaciones (5) por tres funciones de ponderación v_i (o velocidades virtuales, identificadas por estar subrayadas) y su integración sobre todo el volumen, se obtiene:

$$\int_v \underline{v}_i (\sigma_{ik,k} - p_{,i}) dV = \int_v \underline{v}_i (\sigma_{ik} - p \delta_{ik})_{,k} dV = 0 \quad (21)$$

A continuación se diferencian todos los términos en el integrando respecto a la coordenada $x_{k'}$ por lo cual es necesario restar el segundo término de la derecha para mantener la igualdad:

$$\int_v \underline{v}_i (\sigma_{ik,k} - p_{,i}) dV = \int_v [\underline{v}_i (\sigma_{ik} - p \delta_{ik})]_{,k} dV - \int_v \underline{v}_i \gamma_k (\sigma_{ik} - p \delta_{ik}) dV \quad (22)$$

Luego, el primer término de la derecha se transforma en una integral de superficie mediante el teorema de Gauss, y el segundo término se opera reemplazando la divergencia de la velocidad virtual por la tasa de deformación virtual \underline{D}_{ik} gracias a que el tensor esfuerzo es simétrico:

$$\int_v \underline{v}_i (\sigma_{ik,k} - p_{,i}) dV = \int_s \underline{v}_i (\sigma_{ik} - p \delta_{ik}) n_k dS - \int_v \underline{D}_{ik} \sigma_{ik} dV + \int_v \underline{v}_i \gamma_i p dV, \quad (23)$$

donde n_k es la componente k del vector unitario normal a la superficie dS . El primer término de la derecha se reemplaza por el vector de tracciones \hat{t}_i y se obtiene la ecuación:

$$\int_v \underline{v}_i (\sigma_{ik,k} - p_{,i}) dV = \int_s \underline{v}_i \hat{t}_i dS - \int_v \underline{D}_{ik} \sigma_{ik} dV + \int_v \underline{v}_i \gamma_i p dV = 0, \quad (24)$$

la cual se puede escribir así:

$$\int_v \underline{D}_{ik} \sigma_{ik} dV - \int_v \underline{v}_i \gamma_i p dV = \int_v \underline{v}_i \hat{t}_i dS \quad (25)$$

Operaciones similares se realizan en la ecuación (10), como se explica a continuación. Mediante la multiplicación de la ecuación (10) por la función de ponderación \underline{p} y su integración sobre el volumen, se obtiene:

$$\int_v \underline{p} \left(\underline{v}_{i,i}^{(s)} - [k p_{,i}]_i \right) dV = 0 \quad (26)$$

Luego se opera la ecuación de la siguiente forma:

$$\int_v \underline{p} \left(\underline{v}_{i,i}^{(s)} - [k p_{,i}]_i \right) dV = \int_v \underline{p} \underline{v}_{i,i}^{(s)} dV - \int_v [\underline{p} k p_{,i}]_i dV + \int_v \underline{p}_{,i} k p_{,i} dV \quad (27)$$

Y se transforma el segundo término de la derecha en una integral de superficie:

$$\int_v \underline{p} (v_{i,j}^{(s)} - [k p_i]_{,i}) dV = \int_v \underline{p} v_{i,j}^{(s)} dV - \int_s \underline{p} k p_{,n_i} dS + \int_v \underline{p}_{,i} k p_{,i} dV \quad (28)$$

Para los problemas de tejidos biológicos, el gradiente de presión normal a la superficie suele estar definido como una condición de borde sólo cuando es igual a cero, que es el caso de un borde sólido que impide el flujo en la dirección normal. Por lo tanto, el segundo término de la derecha se cancela y se obtiene la ecuación (29):

$$-\int_v \underline{p} (v_{i,j}^{(s)}) dV - \int_v \underline{p}_{,i} k p_{,i} dV = 0, \quad (29)$$

donde se multiplicó por -1 para que la matriz resultante de las ecuaciones (25) y (29) sea simétrica.

En resumen, el problema queda planteado en términos de las ecuaciones (25) y (29), en las cuales aparecen las velocidades de la fase sólida, la presión de poros y los esfuerzos efectivos. Estas ecuaciones no lineales, junto con la ecuación constitutiva, pueden ser resueltas por el método de Newton, como se explica en la segunda parte de este artículo.

3. CONCLUSIONES

En esta primera parte se presentaron las ecuaciones de la poroelasticidad no lineal y su formulación variacional débil para ser resueltas mediante elementos finitos. Este es un planteamiento mixto mediante el cual se expresaron las ecuaciones diferenciales en términos de la presión de poros y la velocidad de la fase sólida. Esta formulación, a diferencia de otras reportadas en la literatura [15,16], reduce el número de grados de libertad de cada nodo a las componentes de la velocidad de la fase sólida y la presión de poros. La formulación variacional débil de las ecuaciones diferenciales permite reducir los requisitos de continuidad para las funciones, de forma que se utilizan en una aproximación mediante elementos finitos. Además, si las funciones de ponderación y las incógnitas se interpolan mediante los mismos polinomios, se garantiza también que las ecuaciones matriciales para la implementación del método sean simétricas, lo cual aumenta la eficiencia del procedimiento.

El análisis de materiales poroelásticos o bifásicos se hizo con base en las leyes generales de la mecánica de los medios continuos, en el cual las funciones físicas, como esfuerzos y velocidades, se promediaron sobre todo el volumen con base en las fracciones de volumen. El análisis mecánico de materiales bifásicos es un problema acoplado en el cual intervienen, por una parte, las deformaciones de la fase sólida, y por la otra, la presión de poros y el flujo del fluido. Si se presentan deformaciones finitas, las variaciones de las fracciones de volumen llegan a ser importantes y es necesario considerar una variación de la permeabilidad dependiente de la deformación, efecto que fue considerado en este planteamiento. Pruebas experimentales han mostrado [8] la tendencia de los tejidos biológicos a recuperarse después de la deformación. No obstante, aun bajo cargas fisiológicas, el tejido presenta grandes deformaciones y un comportamiento no lineal. Estos efectos pueden ser considerados en esta formulación mediante dos modelos hiperelásticos y una ecuación constitutiva hipoeelástica, la que se podría considerar como una forma más general de elasticidad [19].

Este modelo, que generalmente no está incorporado en los programas comerciales de elementos finitos, es muy útil para describir el comportamiento mecánico de los tejidos biológicos, no lineal debido a las grandes deformaciones a que están sometidos y a la variación con la deformación de la permeabilidad y la elasticidad de la fase sólida. Adicionalmente, con base en otras ecuaciones constitutivas que consideren, por ejemplo, efectos plásticos, este modelo podría ser extendido para describir el comportamiento de otros materiales poroelásticos, como el suelo. Esta formulación general permite, además, incluir otros efectos a que pueden verse sometidos los tejidos biológicos durante su funcionamiento, como la viscoelasticidad de la fase sólida y la anisotropía del tejido, lo cual es objeto del trabajo actual de nuestro grupo. En la parte 2 se presenta la implementación y verificación del modelo de elementos finitos.

REFERENCIAS

- [1] HOLMES, M.H. y Mow, V.C. The non-linear characteristics of soft gels and hydrated connective tissues in ultrafiltration, *J. of Biomech.*, 1990, 23, Vol. 1145-1156.
- [2] MOW, V.C., KUEI, S.C., LAI, W.M. y ARMSTRONG, C.G., Biphasic creep and stress relaxation of articular cartilage in compression: Theory and experiments. *J. Biomech. Eng.*, 1980, Vol. 102, pp. 73-84.
- [3] DE BOER, R. Highlights in the historical development of the porous media theory: Toward a consistent macroscopic theory, *Appl. Mech. Rev.*, 1996, Vol. 49, 201-262.

- [4] BIOT, M.A., General Theory of Three-Dimensional Consolidation, *Journal of Applied Physics*, 1940, Vol. 26, pp. 155-164.
- [5] BIOT, M.A., Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid, *Journal of Applied Physics*, 1955, 182-185.
- [6] CORTÉS, D.H., GARCÍA, J.J. y GÓMEZ, G. Modelo de elementos finitos para el análisis lineal de un material poroelástico transversalmente isótropo, *Revista DYNA*, 2005, Vol. 145, pp. 45-56.
- [7] ATESHIAN, G.A., WARDEN, W.H., KIM, J.J. GRELSAMER, R.P. y MOW, V.C., Finite deformation biphasic material properties of bovine articular cartilage from confined compression experiments, *J. of Biomech.*, 1997, Vol. 30, pp. 1157-1164.
- [8] MOW, V.C. y HAYES, W.C., Basic Orthopaedic Biomechanics, *Raven Press*, New York, 1991.
- [9] LI, L.P., BUSCHMANN, M.D. SHIRAZI-ADL, A., A fibril reinforced nonhomogeneous poroelastic model for articular cartilage: inhomogeneous response in unconfined compression, *J. of Biomech.*, 2000, Vol. 33, pp. 1533-1541.
- [10] CHAHINE, N.O., WANG, C.C-B., HUNG, C.T. y ATESHIAN G.A. Anisotropic strain-dependent material properties of bovine articular cartilage in the transitional range from tension to compression, *J. of Biomech.*, 2004, Vol. 37, pp. 1251-1261.
- [11] HOLMES, M.H., Finite deformation of soft tissue: Analysis of a mixture model in uni-axial compression, *J. Biomech. Eng.*, 1986, Vol. 108, pp. 372-381.
- [12] SUH, J.K., SPILKER, R.L. y HOLMES, M.H., A penalty finite element analysis for non-linear mechanics of biphasic hydrated soft tissue under large deformation, *Int. J. Num. Meth. in Engng.*, 1991, Vol. 32, pp. 1411-1439.
- [13] GARCÍA, J.J., ALTIERO, N.J. y HAUT, R.C. Estimation of in situ elastic properties of biphasic cartilage based on a transversely isotropic hypo-elastic model, *J. of Biomech. Eng.*, 2000, Vol. 122, pp. 1-8.
- [14] DE BOER, R. Contemporary progress in porous media theory, *Appl. Mech. Rev.*, 2000, Vol. 53, pp. 323-370.
- [15] ALMEIDA, E.S. y SPILKER, R.L., Mixed and penalty finite element models for the nonlinear behavior of biphasic soft tissues in finite deformation: Part I – Alternate formulations, *CMBBE*, 1996, Vol.1, pp 25-46.
- [16] ALMEIDA, E.S. y SPILKER, R.L. Mixed and penalty finite element models for the nonlinear behavior of biphasic soft tissues in finite deformation: Part II – Nonlinear examples, *CMBBE*, 1996, Vol 1, pp. 151-170.
- [17] OGDEN, R.W., Non-linear elastic deformations, *Dover Publications, Inc.*, New York, 1984.
- [18] BELYTSCHKO, T., LIU, W.K y MORÁN, B., Nonlinear finite elements for continua and structures, *John Wiley & Sons*, 2000 Chichester, USA.
- [19] TRUESDELL, C.A. NOLL, W., The nonlinear field theories of mechanics, *Handbuch der Physik*, Vol. III/3, Springer, Berlin, 1965.

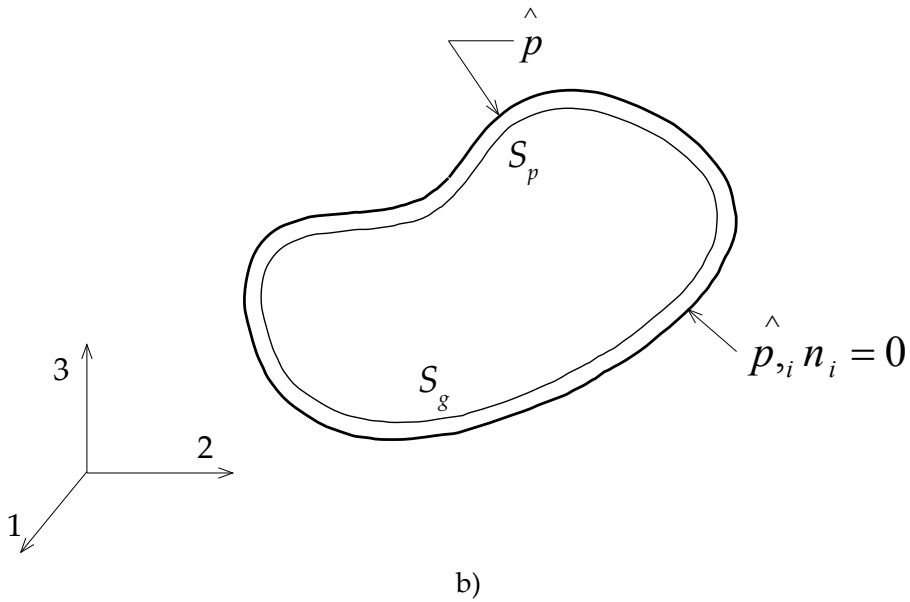
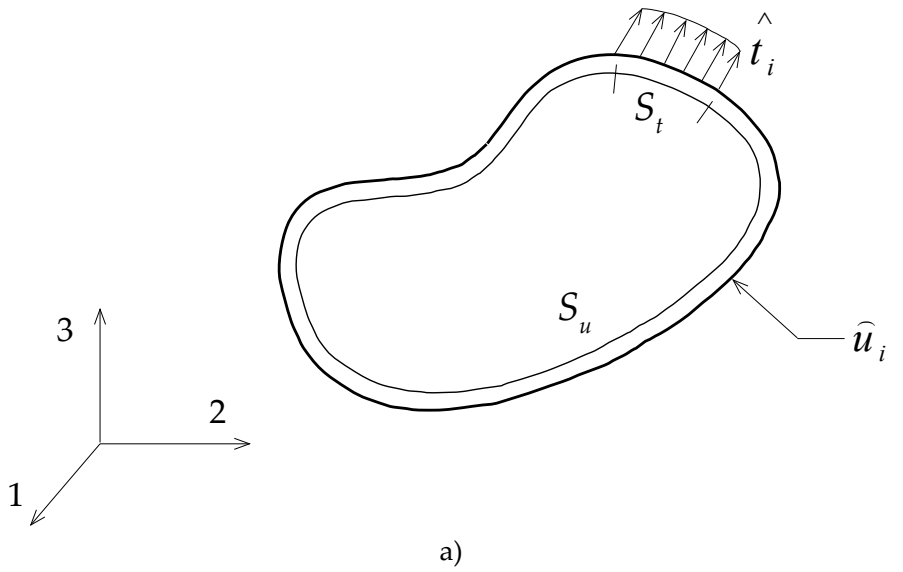


Figura 1
Condiciones de Borde: a) para la fase sólida y b) para el fluido.