

Modelo bifásico no-lineal de elementos finitos para el análisis mecánico de tejidos biológicos*

Parte II: Implementación numérica y validación

José Jaime García** y Daniel Humberto Cortés**

Resumen

Con base en la forma débil de las ecuaciones no lineales que describen el comportamiento mecánico de materiales bifásicos, presentadas en la Parte I, en esta segunda parte se describe la implementación numérica y solución de las ecuaciones para problemas con simetría axial mediante el método de Newton y un procedimiento de integración paso a paso en el tiempo. Adicionalmente se presenta la validación de los resultados del programa con base en soluciones teóricas para los casos de compresión confinada, no confinada, cortante y un resultado experimental para el cartílago articular reportado en la literatura. En todas las comparaciones los resultados del programa fueron muy similares a los obtenidos analítica o experimentalmente.

Palabras claves: Poroelasticidad, materiales bifásicos, tejidos biológicos, bioingeniería.

Abstract

Based on the weak form of nonlinear equations which describe the mechanical behavior of biphasic materials, presented in Part I, in this second part, it is described the numerical implementation and solution of the equations for problems with axial symmetry through Newton's method and a procedure of step-by-step integration in the time. Additionally, the validation of program results is shown based upon theoretical solutions for confined, unconfined and cutting compression cases, and an experimental result for articular car-

Fecha de recepción: 20 de mayo de 2005
Fecha de aceptación: 11 de mayo de 2006

* Este trabajo ha sido posible gracias al apoyo que la Vicerrectoría de Investigaciones de la Universidad del Valle ha brindado al Grupo de Biomecánica de esta institución.

** Escuela de Ingeniería Civil y Geomática, Universidad del Valle. josejgar@univalle.edu.co

*** Escuela de Ingeniería Mecánica, Universidad del Valle

Dirección autor: Universidad del Valle – Sede Meléndez. Calle 13 # 100-00, Edificio 351, Cali (Colombia).

tilage reported in the literature. In all comparisons, program results were very similar to those obtained analytically or experimentally.

Key words: Poroelasticity, biphasic materials, biologic tissues, bioengineering.

1. INTRODUCCIÓN

Cuando se desarrollan investigaciones tendientes a determinar la etiología de las enfermedades asociadas con los tejidos biológicos, como la osteoartritis, o a diseñar dispositivos para tratamientos, como los utilizados para tratar la arterioesclerosis, es conveniente realizar simulaciones computacionales para determinar el comportamiento mecánico de los tejidos. Dado que los tejidos biológicos como los tendones, el cartílago articular y las arterias están constituidos por una fase sólida y un fluido, una adecuada simulación mecánica debe considerar la acción combinada de la fase sólida y del fluido [1].

Debido a la complejidad de los tejidos biológicos, caracterizados por ser anisótropos y heterogéneos [2,3] y por tener un comportamiento no lineal, es necesario recurrir a soluciones numéricas para obtener la simulación de su comportamiento mecánico. Los pocos programas comerciales que tienen incorporadas opciones para simular tejidos poroelásticos, como *ABAQUS* (*Karlsson and Sorenson, INC., Pawtucket, USA*) y *MARC* (*MSC Software Corporation, Santa Ana, USA*), son generalmente muy costosos y demasiado rígidos para acomodarse a las necesidades del usuario. Adicionalmente, es necesario generar en Colombia herramientas propias que permitan hacer desarrollos continuados, para satisfacer las necesidades locales sin tener que pagar sumas importantes a firmas internacionales para el uso de sus programas por un tiempo limitado. En el caso particular, los modelos poroelásticos también pueden ser aplicados para predecir el comportamiento y fallas de los suelos.

En la primera parte de este trabajo se presentaron las ecuaciones generales que describen el comportamiento mecánico no lineal de tejidos biológicos bifásicos, compuestos por una fase sólida y un fluido, así como una formulación que permite expresar las ecuaciones en términos de la velocidad del sólido y la presión de poros. Adicionalmente, se presentó una formulación débil que facilita la implementación del modelo mediante el método de los elementos finitos. En esta segunda parte se toma como base esa formulación débil, y se hace la discretización espacial mediante el método de los elementos finitos aplicados a problemas con un eje de simetría. Se utilizó el método de New-

ton para solucionar las ecuaciones no lineales y un algoritmo de integración paso a paso en el tiempo. Además de la solución del modelo, se presenta su validación, la cual se hizo mediante la comparación de sus resultados con los obtenidos analítica y experimentalmente.

2. MÉTODOS

2.1. Discretización espacial mediante elementos finitos para problemas con simetría axial

La formulación débil del problema está descrita por las ecuaciones (1) y (2) que se señalan a continuación:

$$\int_v \underline{D}_{ik} \sigma_{ik} dV - \int_v \underline{v}_{i,i} p dV = \int_v \underline{v}_i \hat{t}_i dS \quad (1)$$

$$- \int_v \underline{p}(\underline{v}_{i,i}) dV - \int_v \underline{p}_i k p_{,i} dV = 0, \quad (2)$$

donde \underline{D}_{ik} es la tasa de deformación virtual, σ_{ik} son las componentes de los esfuerzos efectivos de Cauchy, v_i son las componentes de la velocidad de la fase sólida, p es la presión de poros, \hat{t}_i son las componentes del vector de tracciones definidas en el contorno St , y k es la permeabilidad del tejido que puede ser función de la deformación. Las funciones subrayadas se refieren a cantidades virtuales. Las integrales se hacen sobre un elemento de volumen que ocupa el tejido en la configuración actual. Se utiliza la convención del índice repetido y la convención de la coma que indica derivadas con respecto a las coordenadas espaciales.

La discretización en el espacio de las ecuaciones (1) y (2) es similar a la presentada en un trabajo previo para el análisis lineal de un material poroelástico [4]. A continuación los corchetes identifican matrices; los paréntesis indican vectores con valores nodales, y las llaves identifican vectores que contienen funciones. Se utilizaron elementos isoparamétricos de cuatro nodos, y las funciones formuladas para interpolar las velocidades también se utilizaron para interpolar las presiones. Para el problema con simetría axial cada nodo tiene tres incógnitas que son las velocidades v_r y v_z en las direcciones radial y axial, respectivamente, y la presión de poros p . Las velocidades y la presión se aproximaron así:

$$\begin{Bmatrix} v_r \\ v_z \end{Bmatrix} = [N]_1(v) \quad (3)$$

$$p = [N]_2(p), \quad (4)$$

donde $[N]_1$ y $[N]_2$ son matrices de (2x8) y (1x4) posiciones respectivamente, que contienen las funciones de forma del elemento, y (v) y (p) son vectores de 8 y 4 posiciones, respectivamente que contienen las velocidades y presiones en los nodos del elemento. Con las aproximaciones de las ecuaciones (3) y (4), se pueden expresar la tasa de deformación, la divergencia de la velocidad y el gradiente de presión en términos de los valores nodales, así:

$$\{D\} = [B]_1(v) \quad (5)$$

$$v_{i,i} = [B]_2(v) \quad (6)$$

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} = [B]_3(p) \quad (7)$$

donde $[B]_1$, $[B]_2$ y $[B]_3$ son matrices de (4,8), (1x8) y (2x4) posiciones respectivamente, que contienen derivadas de las funciones de forma; (v) y (p) son los vectores con los valores nodales de la velocidad y la presión de poros respectivamente, y el vector $\{D\}$ contiene las cuatro componentes no triviales del tensor tasa de deformación, que para el caso de simetría axial son:

$$\{D\} = \left\{ \begin{array}{c} \partial v_r / \partial r \\ \partial v_z / \partial z \\ v_r / r \\ (\partial v_r / \partial z + \partial v_z / \partial r) / 2 \end{array} \right\}, \quad (8)$$

donde r y z son las coordenadas espaciales en las direcciones radial y axial respectivamente. Aproximaciones iguales a las anteriores aplican para las cantidades virtuales.

El reemplazo de las aproximaciones anteriores en las ecuaciones (1) y (2) dio como resultado:

$$(\underline{v})^T \left[\int_v [B]_i^T(\sigma) dV - [C](p) - (f) \right] = 0 \quad (9)$$

$$(\underline{p})^T [-[C]^T(v) - [K]_p(p)] = 0, \quad (10)$$

donde $(v)^T$ y $(p)^T$ son vectores traspuestos con las velocidades y presiones virtuales en los nodos. Para que las ecuaciones (9) y (10) se satisfagan para cualquier escogencia de los vectores virtuales, debe cumplirse que:

$$(\underline{v})^T \left[\int_v [B]_i^T(\sigma) dV - [C](p) - (f) \right] = 0 \quad (11)$$

$$-[C]^T(v) - [K]_p(p) = 0, \quad (12)$$

donde las matrices $[C]$ y $[K]_p$ están definidas así:

$$[C] = \int_v [B]_2^T [N]_2 dV, \quad (13)$$

$$[K]_p = \int_v [B]_3^T k [B]_3 dV \quad (14)$$

El vector de fuerzas externas queda definido como:

$$(f) = \int_{S_i} [N]_1^T \{ \hat{t} \} dS, \quad (15)$$

donde $\{ \hat{t} \}$ es el vector de tracciones externas sobre la superficie S_i .

2.2. Solución de las ecuaciones mediante el método de Newton y el algoritmo de Wilson

Se utilizó el método de Newton para plantear la solución de las ecuaciones no lineales (11) y (12), tal como se explica en el Apéndice 1. Como resultado del método de Newton, se obtienen en la iteración m las ecuaciones:

$$[K]_s(\Delta u) - [C](\Delta p) = -(r_1)^{(m)}, \quad (16)$$

$$-[C]^T(\Delta v) - [K]_p(\Delta p) = -(r_2)^{(m)}, \quad (17)$$

donde (Δu) , (Δv) y (Δp) son vectores que contienen los incrementos de desplazamiento, velocidad y presión respectivamente, durante la iteración m .

Como en las ecuaciones (16) y (17) aparecen incrementos de desplazamiento e incrementos de velocidades, para obtener la solución se debe aplicar un método de integración paso a paso en el tiempo, como el método de Wilson (Apéndice 2), el cual permite obtener una ecuación equivalente a la (17) en términos de los incrementos de desplazamiento y presión:

$$-[C]^T(\Delta u) - \theta dt [K]_p(\Delta p) = -\theta \Delta t (r_2)^{(m)} - \Delta t [C]^T(v)^{(m)} \quad (18)$$

El algoritmo consiste, entonces, en calcular en cada iteración los incrementos de desplazamiento y presión mediante la solución de las ecuaciones (16) y (18). Luego se actualizan las coordenadas con base en los desplazamientos obtenidos y se procede a calcular los esfuerzos y residuos. Cuando el residuo es muy pequeño, se termina la iteración y se hace un incremento de carga hasta que se completa el análisis.

2.3. Verificación de los resultados del programa

Para verificar el programa, primero se compararon sus resultados con los obtenidos mediante un programa lineal poroelástico para el caso de compresión no confinada. Dado que esta comparación sólo es válida para el rango de pequeñas deformaciones y no brinda información sobre el comportamiento no lineal para deformaciones finitas, se realizaron otras verificaciones para deformaciones grandes, como se describe a continuación. Se realizó una comparación con los resultados analíticos obtenidos para el problema de compresión no confinada en equilibrio, considerando deformaciones finitas y las constantes elásticas de la tabla 1. Con el objeto de obtener deformaciones finitas, se aplicó una presión axial de 2.716 MPa y se hizo el análisis con un solo elemento de 1 mm en la dirección axial y 1 mm en la dirección radial, cubriendo una distancia radial desde 1 mm hasta 2 mm.

Adicionalmente, se hizo la comparación de los resultados para el problema de compresión confinada, en cuya solución numérica se consideró una no linealidad consistente en una variación de la permeabilidad con la deformación, de tal manera que la ecuación diferencial parcial resultante que describe el problema fuese lineal, con una solución analítica posible de obtener. La malla utilizada en esta comparación consistió en cuatro elementos en la dirección vertical, de una altura de 0.25 mm, para una altura total de 1 mm. Dado que el flujo se produce en la dirección axial y que no hay desplazamientos ni gradientes en

la dirección radial, sólo se hizo una división en esta dirección. Las constantes elásticas fueron las presentadas en la tabla 1, con una permeabilidad inicial de 10 N.s/mm⁴. Se aplicó un desplazamiento total de 0.4 mm en la dirección axial, tal que la relación de alargamiento fuese de 0.6.

Adicionalmente, se modeló una prueba a cortante con una malla de cuatro elementos de 1 mm en la dirección axial y 0.25 mm en la dirección radial, desde el radio 1 mm hasta el radio 2 mm, de tal manera que se conforman cuatro elementos ubicados radialmente. Los nodos internos se fijaron en las direcciones radial y axial, y los otros nodos en la dirección radial. Se aplicó una carga axial de 3.63 N distribuida en los dos nodos externos. Para cada modelo se utilizaron las constantes elásticas de la tabla 1.

Tabla 1

Constantes utilizadas para la comparación de los resultados en equilibrio

Ecuación constitutiva	Constantes elásticas		
Hipoelástico	$C_{11} = 2 \text{ MPa}$	$C_{12} = 0.2 \text{ MPa}$	$C_{13} = 0.9 \text{ MPa}$
Nuevo Hookeano	$\mu_0 = 2 \text{ MPa}$	$\lambda = 0.5 \text{ MPa}$	
Biológica	$\alpha_0 = 1 \text{ MPa}$	$\alpha_1 = 0.2$	$\alpha_2 = 0.2$

Por último, se realizó una comparación entre los resultados numéricos del modelo hiperelástico biológico con resultados experimentales obtenidos en pruebas de compresión confinada del cartílago articular [5]. La prueba de compresión confinada fue aplicada a una muestra de cartílago articular extraído del hombro de bovinos adultos. El tamaño de la muestra fue de 6.35 mm de diámetro y 1.41 mm de altura. La prueba consistió en la aplicación de 5 rampas de desplazamiento de 0.12 mm cada una, con velocidad de 0.25 $\mu\text{m/s}$, y su relajación hasta el equilibrio. El proceso de ajuste de curvas se realizó mediante el *toolbox* de optimización multidimensional del programa Matlab 7.0 (*The Mathworks, Inc. Natick, MA*). La función objetivo utilizada en el proceso de optimización fue el promedio de las diferencias al cuadrado entre los valores experimentales y numéricos. Durante la optimización, el programa realizó una variación de los parámetros del modelo hasta que la función objetivo toma un valor mínimo, dando como resultado los parámetros que mejor ajustan la curva.

3. RESULTADOS

En la comparación con las curvas obtenidas con el programa poroelástico lineal (figura 1), se observó un comportamiento casi idéntico. Para los problemas

de compresión no confinada en equilibrio se observó una correlación perfecta entre los esfuerzos analíticos y numéricos para los modelos hiperelásticos (tabla 2). Para el modelo hipoelástico, se observaron algunas diferencias que fueron hasta del 5% para el desplazamiento lateral. En el problema de compresión confinada con permeabilidad variable se pudo apreciar una buena correlación (0.999, 0.991) entre las curvas analítica y numérica para los desplazamientos y la presión de poros, con algunas diferencias en la primera parte de las curvas (figuras 2 y 3). En la validación para la prueba de cortante se obtuvieron diferencias insignificantes para los modelos hiperelásticos, y para el modelo hipoelástico unas diferencias que llegaron a ser del 3.9% para el desplazamiento axial en la circunferencia exterior (tabla 3).

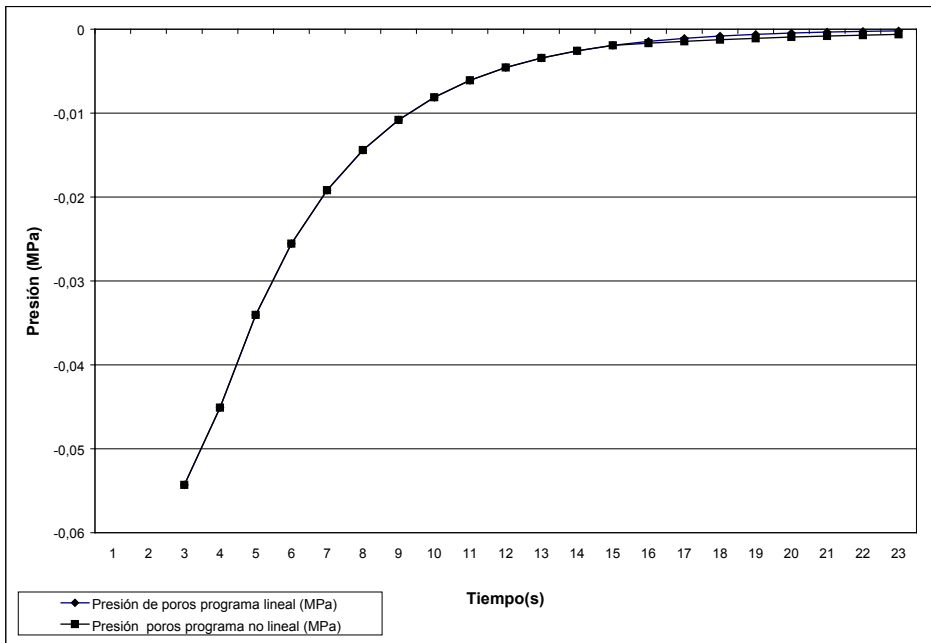


Figura 1
Variación de la presión de poros obtenida con los programas lineal y no lineal

Tabla 2

Resultados numéricos y analíticos en equilibrio, compresión no confinada

Ecuación constitutiva	Hipoelástica		Nuevo Hookeano		Biológica	
	Númérico	Analítico	Númérico	Analítico	Númérico	Analítico
Esfuerzo (MPa)	-2.205	-2.214	-2.312	-2.312	-2.221	-2.221
Desplazamiento lateral (mm)	0.216	0.227	0.0839	0.0839	0.106	0.106

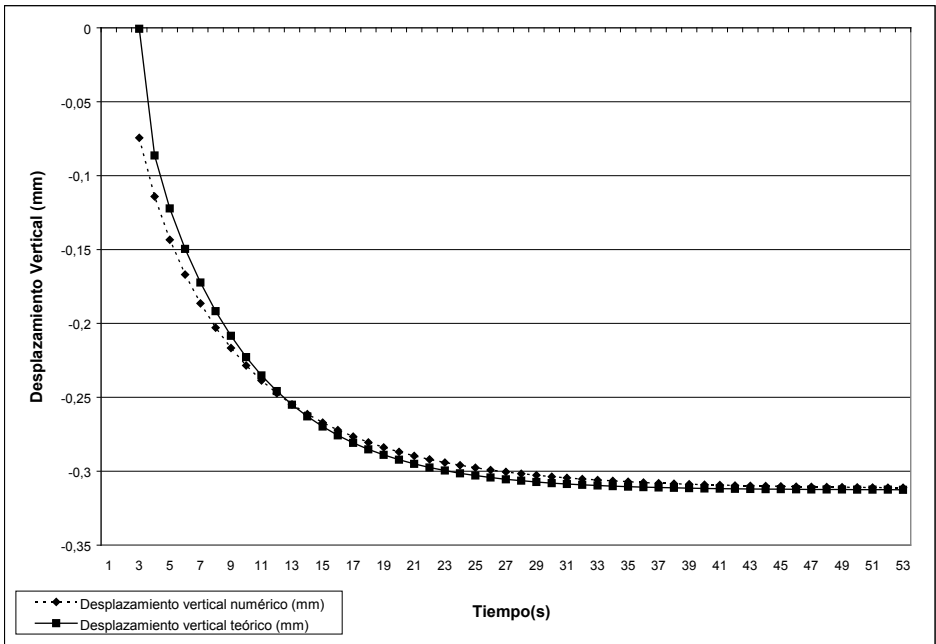


Figura 2

Soluciones analítica y numérica para el desplazamiento vertical, compresión confinada y permeabilidad variable

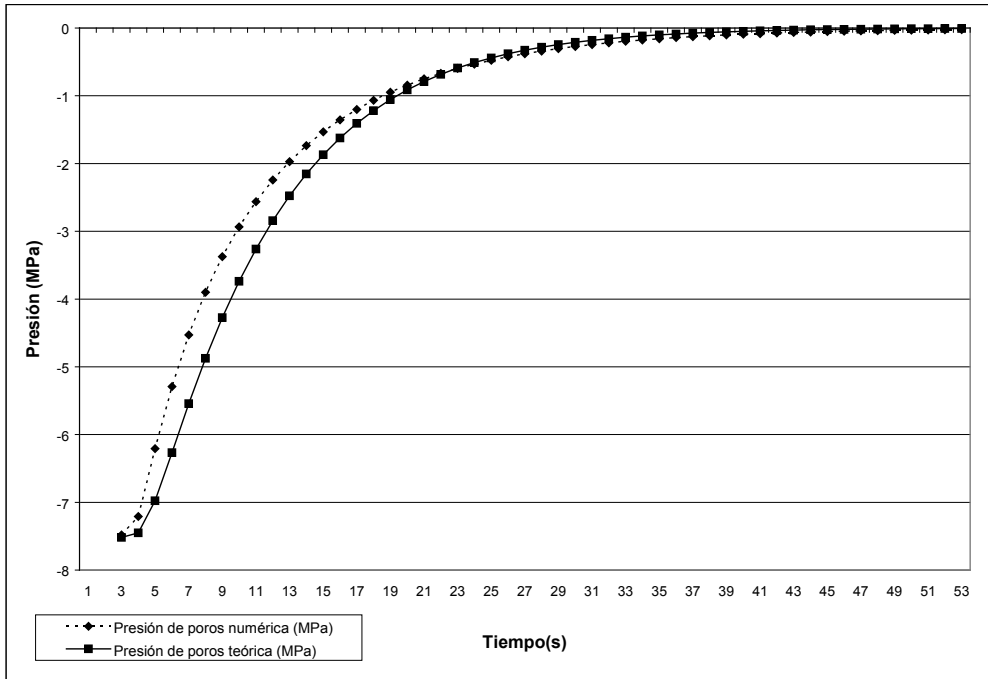


Figura 3

Soluciones analítica y numérica para la presión de poros en la base, compresión confinada y permeabilidad variable

Tabla 3

Resultados numéricos y analíticos para la prueba de cortante

Ecuación constitutiva	Hipoelástica		Nuevo Hookeano		Biológica	
	Numérico	Analítico	Numérico	Analítico	Numérico	Analítico
Esfuerzo cortante (MPa) Elemento interno	0.510	0.513	0.513	0.513	0.513	0.513
Desplazamiento axial (mm) radio = 1.25 mm	0.159	0.153	0.064	0.064	0.141	0.142
Desplazamiento axial (mm) radio = 1.5 mm	0.283	0.275	0.117	0.117	0.261	0.263
Desplazamiento axial (mm) radio = 1.75 mm	0.386	0.376	0.161	0.161	0.364	0.367
Desplazamiento axial (mm) radio = 2mm	0.475	0.464	0.199	0.199	0.456	0.458

En la comparación experimental se observó que el modelo hiperelástico biológico describe muy bien el comportamiento del cartílago articular en pruebas de compresión confinada ($r = 0.9948$) (figura 4). Las diferencias porcentuales, después de las cinco rampas, fueron de 14%, 4.1%, 5.1%, 10% y 15.4% para los esfuerzos pico, y de 1.4%, 3.9%, 1.21%, 1.01% y 0.04% para los esfuerzos en equilibrio. Las propiedades elásticas α_0 , α_1 , α_2 , k_0 y M producto de la optimización (tabla 4) se utilizaron para hallar el módulo de elasticidad E y el coeficiente de Poisson ν mediante las ecuaciones (17) y (18) (tabla 4).

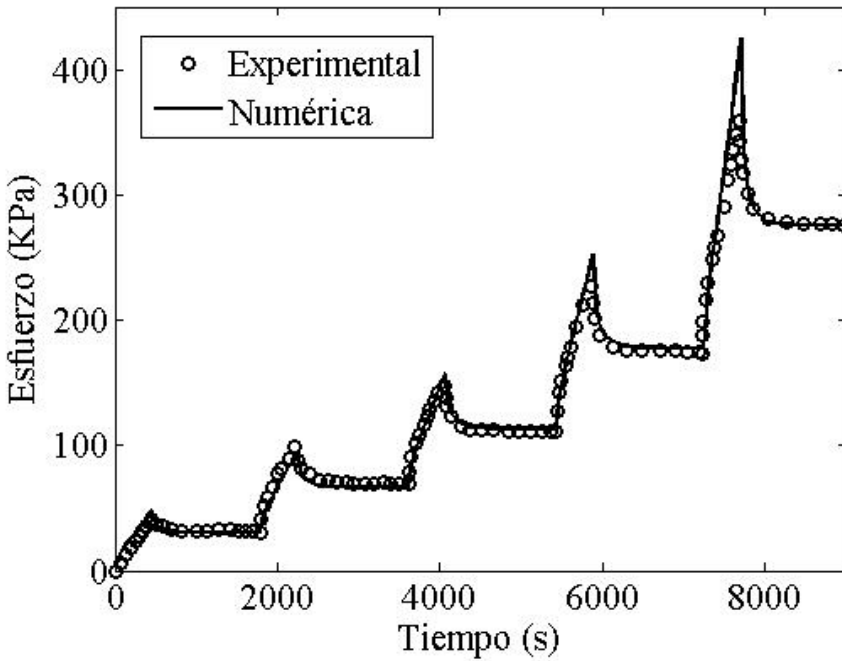


Figura 4
 Comparación del modelo hiperelástico con resultados experimentales
 ($r = 0.9948$)

Tabla 4
Propiedades del modelo biológico producto
del ajuste de datos experimentales

α_0	α_1	α_2	k_0 mm/Ns	M	E (MPa)	ν
0.184	0.3897	0.0	0.0132	3.1441	0.390	0.0

4. DISCUSIÓN

Se presentaron las ecuaciones de la poroelasticidad no lineal y su solución mediante elementos finitos con un algoritmo Lagrangiano con actualización e integración en el tiempo basado en una formulación mixta, mediante la cual se expresan las ecuaciones diferenciales en términos de la presión de poros y la velocidad de la fase sólida. Este modelo poroelástico, que generalmente no está incorporado en los programas comerciales de elementos finitos, es muy útil para describir el comportamiento mecánico de los tejidos biológicos, el cual es no lineal debido a las grandes deformaciones a que estos tejidos están sometidos y a la variación de la permeabilidad y el comportamiento elástico con la deformación. La correlación entre los resultados de un computacional y los resultados de los experimentos realizados con tejidos biológicos es muy importante cuando se trata de establecer la etiología de enfermedades como la osteoartritis. A diferencia de otros, en el modelo presente se implementaron, además de dos modelos hiperelásticos, uno hipelástico que ha sido presentado [6] como una alternativa para modelar la fase sólida del cartílago articular.

La validación de los resultados del programa se hizo con base en cuatro problemas cuya solución analítica o numérica puede ser conocida. En estos casos se intentaron reproducir todas las condiciones de carga a que podrían estar sometidos los tejidos biológicos, como las pruebas de compresión confinada y no confinada en las que predominan los efectos hidrostáticos y la prueba de cortante en la que predominan las componentes de los esfuerzos desviados. En todos los análisis se observaron muy buenas correlaciones entre los resultados analíticos y numéricos, lo que da un buen grado de confianza sobre la validez de los resultados del programa. Algunas diferencias se observaron en la primera parte de las curvas de compresión no confinada (figuras 2 y 3), las cuales podrían atribuirse a que la solución analítica es válida para una aplicación instantánea de carga mediante una función escalón o de Heaviside. En el caso numérico es imposible hacer esta aplicación instantánea de carga, pero se trató de hacer el incremento

inicial mediante una función rampa en un intervalo de tiempo muy pequeño. Algunas diferencias se observaron en los resultados del modelo hipoeelástico, las cuales podrían atribuirse a la forma incremental como se calculan los esfuerzos con esta ecuación constitutiva, con lo que tienden a introducirse errores que se deben al cálculo aproximado del tensor de rotación [7].

Se hizo el ajuste con el modelo hiperelástico biológico de las curvas experimentales de compresión confinada y deformaciones finitas, y se observó una buena correlación entre los resultados experimentales y numéricos ($r = 0.9948$). Además, los valores de E y ν fueron similares a los reportados por Korhonen *et al.* [8] ($E = 0.34 \pm 0.17$ MPa y $\nu = 0.21 \pm 0.05$) y Wang *et al.* [9] ($E = 0.385 \pm 0.103$ MPa y $\nu = 0.045 \pm 0.018$). Con este modelo se corrobora que la permeabilidad es una función no lineal de la deformación, lo cual juega un papel muy importante en el comportamiento mecánico del cartílago articular [10].

El presente trabajo constituye una extensión del modelo lineal poroelástico presentado en otro artículo [4]. El programa que implementa este modelo está acoplado con la unidad de pre y postproceso GID (CIMNE, Cataluña, España), para permitirle al usuario una fácil generación de los datos y análisis de los resultados. Este programa constituye una plataforma de trabajo sobre la cual se pueden implementar otras opciones para describir de una manera más aproximada otros efectos a que pueden estar sometidos los tejidos biológicos, como la anisotropía y la viscoelasticidad de su fase sólida, lo cual es objeto del trabajo actual de nuestro grupo. Esta herramienta se pone a disposición de la comunidad académica colombiana.

APÉNDICE 1

Para obtener las matrices tangentes que permiten hacer las iteraciones del método de Newton, se calculan en cada iteración m los residuos $r_1^{(m)}$ y $r_2^{(m)}$ de las ecuaciones (1) y (2), así:

$$r_1^{(m)} = \int_v \underline{D}_k \sigma_k dV - \int_v \underline{v}_{i,i} p dV - \int_{S_i} \hat{v}_i t_i dS, \quad (A1. 1)$$

$$r_2^{(m)} = \int_v \underline{p} \left(v_{i,i}^{(s)} \right) dV - \int_v \underline{p}_{,i} k p_{,i} dV = 0 \quad (A1. 2)$$

Los residuos en la iteración $(m + 1)$ se aproximan mediante los dos primeros términos de una serie de Taylor y se igualan a cero:

$$r_1^{(m+1)} = r_1^{(m)} + r_1^{\bullet(m)} \delta t = 0, \quad (\text{A1. 3})$$

$$r_2^{(m+1)} = r_2^{(m)} + r_2^{\bullet(m)} \delta t = 0, \quad (\text{A1. 4})$$

donde los puntos arriba indican derivadas materiales de los residuos y δt es un incremento de tiempo. De las derivadas materiales de cada término de los residuos provienen las matrices tangentes, tal como se explica a continuación:

La derivada material (representada a continuación como $\frac{D}{D}$) del primer término de la ecuación (A1.1) se puede expresar así [11]:

$$\frac{D}{D} \int_v \underline{D}_{ik} \sigma_{ik} dV = \int_v \left(\frac{\underline{D}_{ik} \tau_{ik}^\nabla}{J} - 2 \underline{D}_{im} \sigma_{mk} D_{ik} + L_{im} \sigma_{mk} L_{ik} \right) dV, \quad (\text{A1. 5})$$

donde τ_k^∇ son las componentes de la tasa de Jaumann del esfuerzo de Kirchhoff, y L_{im} son las componentes del gradiente de velocidades.

Mediante el reemplazo de las aproximaciones espaciales dadas en las ecuaciones (3)-(7) para los términos de la ecuación (A1.5), se puede identificar la matriz tangente de la fase sólida $[K]$ como aquella que aparece entre el vector transpuesto con las velocidades virtuales nodales $(\underline{v})^T$ y el vector con las velocidades de los nodos (v) :

$$\frac{D}{Dt} \int_v \underline{D}_{ik} \sigma_{ik} dV = (\underline{v})^T \left[\int_v [B]_4^T [H] [B]_4 dV - \int_v [B]_4^T [\sigma] [B]_4 dV \right] (v) \delta t = (\underline{v})^T [K] (v) \delta t, \quad (\text{A1. 6})$$

donde $[H]$ es una matriz de (5x5) posiciones que contiene los coeficientes del tensor de elasticidad; $[B]_4$ es una matriz de (5x8) posiciones que contiene derivadas de las funciones de forma, y

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_z & 0 & 0 & 0 & \tau_{rz} \\ 0 & \sigma_r & 0 & \tau_{rz} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\theta & 0 & 0 \\ 0 & \tau_{rz} & 0 & \frac{\sigma_z - \sigma_r}{2} & \frac{\sigma_r - \sigma_z}{2} \\ \tau_{rz} & 0 & 0 & \frac{\sigma_z - \sigma_r}{2} & \frac{\sigma_r - \sigma_z}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{A1. 7})$$

Debe observarse que el producto de $(v) \delta t$ es igual al incremento de desplazamientos (Δu) en la iteración.

Para el cálculo de la derivada material del segundo término de la ecuación (A1.1), se procede de la siguiente manera, haciendo uso del teorema de transporte de Reynolds [12]:

$$\frac{D}{D} \int_v \underline{v}_{i,i} p dV = \int_v \left[\underline{v}_{i,i} p + \underline{v}_{i,i} p + \underline{v}_{i,i} v_{n,n} p \right] dV \quad (A1.8)$$

En esta formulación sólo se consideró la segunda componente del término de la derecha de (A.1. 8), el cual da origen a la matriz de acoplamiento $[C]$ definida en la ecuación (13).

$$\int_v [\underline{v}_{i,i}] dV \delta t = (\underline{v})^T \int_v [B]_2^T [N]_2 dV (p) \delta t = (\underline{v})^T [C] (p) \delta t \quad (A1. 9)$$

El producto de $(\dot{p}) \delta t$ es igual al incremento de presión de poros (Δp) en la iteración.

La tasa de cambio del primer término de la ecuación (2) se obtiene así:

$$\frac{D}{Dt} \int_v \underline{p} v_{i,i} dV = \int_v \left[\dot{\underline{p}} v_{i,i} + \underline{p} \dot{v}_{i,i} + v_{n,n} \underline{p} v_{i,i} \right] dV \quad (A1. 10)$$

En esta formulación sólo se consideró el segundo término de (A.1.10), el cual da origen a la matriz de acoplamiento transpuesta $[C]$, tal como se muestra a continuación:

$$\int_v \underline{p} \dot{v}_{i,i} dV \delta t = (\underline{p})^T \int_v [N]_2^T [B]_2 dV (\dot{v}) \delta t = (\underline{p})^T [C]^T (\dot{v}) \delta t \quad (A1.11)$$

El producto de $(\dot{v}) \delta t$ es igual a aceleración por tiempo, es decir, igual al incremento de la velocidad (Δv) en la iteración.

Finalmente, la derivada material del segundo término de la ecuación (22) es como sigue:

$$\frac{D}{Dt} \int_v \underline{p}_{,i} k p_{,i} dV = \int_v \left[\dot{\underline{p}}_{,i} k p_{,i} + \underline{p}_{,i} k \dot{p}_{,i} + v_{n,n} \underline{p}_{,i} k p_{,i} \right] dV \quad (\text{A1. 12})$$

En esta formulación sólo se consideró el segundo término, el cual da origen a la matriz $[K]_p$ definida en la ecuación (31), tal como se muestra a continuación:

$$\int_v \underline{p}_{,i} k \dot{p}_{,i} dV \delta t = (\underline{p})^T \int_v [B]_s^T k [B]_s dV (\dot{p}) \delta t = (\underline{p})^T [K]_p (\dot{p}) \delta t \quad (\text{A1. 13})$$

El producto de $(\dot{p}) \delta t$ es igual al incremento de presión de poros (Δp) durante la iteración.

Después de sustituir las ecuaciones (A1. 6), (A1. 9), (A1. 11) y (A1. 13) en las ecuaciones (A1. 3) y (A1. 4), se pueden simplificar los vectores con las velocidades y presiones virtuales para obtener las ecuaciones (16) y (17), en las cuales los residuos toman una forma vectorial.

APÉNDICE 2

En el método de Wilson se supone que la velocidad es constante en cada intervalo de tiempo determinado por la variable local t , que varía desde 0 hasta Δt (el tiempo total está asociado con la variable t):

$$(v(\tau)) = (v)^{(m)} + \theta[(v)^{(m+1)} - (v)^{(m)}] \quad (\text{A2.1})$$

donde $v(\tau)$ es el vector con las velocidades nodales en el intervalo de tiempo; $(v)^{(m)}$ es el vector de velocidades nodales en el tiempo t_m ; $(v)^{(m+1)}$ es el vector de velocidades nodales en el tiempo t_{m+1} , y θ es un parámetro que puede variar desde 0 hasta 1. Si se integra la ecuación (A2.1) con respecto al tiempo, se obtiene el vector de desplazamientos nodales $(u(\tau))$ en el intervalo:

$$(u(\tau)) = (u)^{(m)} + \tau(v)^{(m)} + \theta\tau[(v)^{(m+1)} - (v)^{(m)}], \quad (\text{A2.2})$$

donde $(u)^{(m)}$ es el vector de desplazamientos nodales en el tiempo t_m . Si se evalúa (A2.2) en $\tau = \Delta t$, se obtiene:

$$(u^{(m+1)}) = (u)^{(m)} + \Delta t(v)^{(m)} + \theta \Delta t[(v)^{(m+1)} - (v)^{(m)}], \quad (\text{A2.3})$$

la cual se puede reorganizar así:

$$(\Delta u) = \Delta t(v)^{(m)} + \theta \Delta t(\Delta v), \quad (\text{A2.4})$$

La sustitución de la ecuación (A2.4) en la ecuación (17) da como resultado la ecuación (18).

REFERENCIAS

- [1] MOW, V.C., KUEI, S.C., LAI, W.M. y ARMSTRONG, C.G., Biphasic creep and stress relaxation of articular cartilage in compression: Theory and experiments. *J. Biomech. Eng.*, 1980, Vol. 102, pp. 73-84.
- [2] LI, L.P., BUSCHMANN, M.D. and SHIRAZI-ADL, A., A fibril reinforced nonhomogeneous poroelastic model for articular cartilage: Inhomogeneous response in unconfined compression, *J. of Biomech.*, 2000, Vol. 33, pp. 1533-1541.
- [3] CHAHINE, N.O., WANG, C.C-B., HUNG, C.T. y ATESHIAN G.A. Anisotropic strain-dependent material properties of bovine articular cartilage in the transitional range from tension to compression, *J. of Biomech.*, 2004, Vol. 37, pp. 1251-1261.
- [4] CORTÉS, D.H., GARCÍA, J.J. y GÓMEZ, G. Modelo de elementos finitos para el análisis lineal de un material poroelástico transversalmente isótropo, *Revista DYNA*, 2005, Vol. 145, pp. 45-56.
- [5] ATESHIAN, G.A., WARDEN, W.H., KIM, J.J. GRELSAMER, R.P. y Mow, V.C., Finite deformation biphasic material properties of bovine articular cartilage from confined compression experiments, *J. of Biomech.*, 1997, Vol. 30, pp. 1157-1164.
- [6] GARCÍA, J.J., ALTIERO, N.J. y HAUT, R.C. Estimation of in situ elastic properties of biphasic cartilage based on a transversely isotropic hypo-elastic model, *J. of Biomech. Eng.*, 2000, Vol. 122, pp. 1-8.
- [7] BELYTSCHKO, T., LIU, W.K y MORÁN, B., *Nonlinear finite elements for continua and structures*, John Wiley & Sons, 2000 Chichester, USA.
- [8] KORHONEN, R.K., LAASANEN, M.S., TÖYRÄS, J., RIEPPO, J., HIRVONEN J., HELMINEN H.J. y JURVENLIN J.S., Comparison of the equilibrium response of articular cartilage in unconfined compression, confined compression and indentation, *J. of Biomech.*, 2002, Vol. 35, pp. 903-909.
- [9] WANG C. C-B., CHAHINE N.O., HUNG C.T. y ATESHIAN G.A., Optical determination of anisotropic material properties of bovine articular cartilage in compression, *J. of Biomech.*, 2003, Vol. 36, 339-353.
- [10] REYNAUD, B. y QUINN, T.M., Anisotropic hydraulic permeability in compressed articular cartilage, *J. of Biomech.*, In press.
- [11] WOOD, R.D. Lecture notes on nonlinear continuum mechanics and associated finite element procedures, Department of Civil Engineering, University of Wales, 1990, Swansea.
- [12] MALVERN, L., *Introduction to the mechanics of a continuous medium*, 1969, Prentice-Hall, USA.