Aplicación de metodos para el diseño y selección de accionamientos rápidos

Jorge González Coneo*, Vladimir Quiroz Mariano**, Heriberto Maury***, Carles Riba****

Resumen

Existen una gran cantidad de equipos que trabajan la mayor parte del tiempo en régimen transitorio; por lo tanto, para su diseño y/o selección se necesitan metodologías y enfoques distintos de los utilizados cuando los equipos trabajan en régimen estacionario.

En este trabajo se muestra la aplicación de dos metodologías para la selección de accionamientos rápidos: Potencia transitoria - Energía Cinética Doble y Par-Constante de Tiempo Electromecánica, necesarias en el diseño y selección de los accionamientos para una máquina troqueladora que se desarrolló en un proyecto financiado por Colciencias. Fue necesario emplear el programa MATLAB e información obtenida de los catálogos de los fabricantes para realizar las simulaciones necesarias en la evaluación de la conveniencia de diferentes alternativas para el accionamiento. En este artículo, además, se analizan los resultados alcanzados en este caso de aplicación, para identificar las ventajas, limitaciones y la complementariedad entre los dos métodos citados.

Palabras claves: Potencia transitoria, energía cinética doble, relación de transmisión óptima, par-constantes de tiempo, accionamientos rápidos.

Abstract

There are many equipments that work the most part of their time in transient regime; therefore, in the design of their drive systems must be employed different methodologies to when, they work in stationary regime.

Fecha de recepción: 10 de marzo de 2005
Fecha de aceptación: 5 de julio de 2006

* Ingeniero Mecánico, candidato a Magíster en Ingeniería Mecánica. Docente de la Corporación Universitaria de la Costa (CUC). Barranquilla (Colombia). *jgonzaleze@uninorte.edu.co*

** Ingeniero Mecánico, Especialista en producción automática y robótica, candidato a Magíster en Ingeniería Mecánica. Docente investigador de la Universidad Tecnológica de Bolívar (UTB). *vquiroz@unitecnologica.edu.co*

*** Doctor Ingeniero, profesor investigador, Departamento de Ingeniería Mecánica, Universidad del Norte, Barranquilla (Colombia). *hmaury@uninorte.edu.co*

**** Doctor Ingeniero, Departamento de Ingeniería Mecánica, Universidad Politécnica de Cataluña (España). *riba@cdei,upc.es*

Dirección: Universidad del Norte, Departamento de Ingeniería Mecánica, Km 5 a vía Puerto Colombia, Barranquilla (Colombia).

INGENIERÍA & DESARROLLO
Número 20
Julio-Diciembre, 2006
ISSN: 0122-3461

In this paper is shown the application of two distinct methods to the design and selection of the components of an drive system for rapid movements. The Transient Power – Double Kinetic Energy Method and Torque – Time Constant Method were applied to select the drive system of a axis to linear guidance in a punch machine, this case was developed within a project founded by Colciencias. It was necessary to use MATLAB and information obtained from catalogs in order to carry out the required simulations in the evaluation process of the convenience of distinct drive kinds. Also, in this paper is analyzed the complementariness of the referenced methods.
Key words: Transient power, double kinetic energy, optimal transmission ratio, time constant - torque, fast drives.

INTRODUCCIÓN

Son muchas las situaciones en las que se requiere realizar movimientos rápidos en tiempos muy pequeños, detener momentáneamente el sistema y cambiar la dirección del movimiento, tal como en los accionamientos de robots. En este tipo de sistemas, el tiempo en el que se debe conseguir el movimiento es tan corto que implica generalmente un transitorio con aceleraciones elevadas, razón por la cual se requiere saber si el sistema de accionamiento podrá entregar la potencia requerida en el tiempo disponible para realizar el movimiento, el cual suele ser del orden de algunos milisegundos.

Para apuntar al logro del objetivo anterior se considerarán dos métodos:

- Riba C. (1997) propone un método que está basado en un modelo mecánico del conjunto motor-transmisión-carga, con el cual se puede estimar la relación de transmisión óptima para minimizar el tiempo consumido por el accionamiento en realizar el desplazamiento necesario.

- Por otra parte, Maury H. (1998) plantea un modelo que incluye como parámetros fundamentales el par requerido y la constante de tiempo global del sistema, la cual implícitamente indica la rapidez de respuesta de un sistema de accionamiento a una demanda de posición o de velocidad. Este modelo permite evaluar la incidencia simultánea en dicha respuesta de los factores característicos del accionamiento de naturaleza eléctrica, magnética, mecánica así como de su control.

1. CASO DE ESTUDIO

El caso de aplicación hace referencia al diseño de una máquina troqueladora para una empresa dedicada a la fabricación de equipos de refrigeración, la cual es empleada en el proceso de conformado de láminas metálicas y se demanda de ella mayores niveles de producción.

Esta máquina consta de dos sistemas de desplazamiento lineal: uno para la mesa que soporta la lámina que se va a troquelar y otro para los troqueles y el accionamiento de potencia. Luego de un análisis de las operaciones requeridas para el troquelado y de mediciones de campo, se encontró que las oportunidades más importantes para mejorar significativamente la producción de este tipo de máquinas se hallan en reducir los tiempos de posicionamiento. Por consiguiente, la investigación se concentró en la determinación de los parámetros característicos necesarios en el accionamiento dados la inercia de carga y el tiempo máximo para el movimiento, si se apunta a mejorar la producción en un 30%. El estudio se desarrolló dentro de un proyecto de investigación financiado por Colciencias.

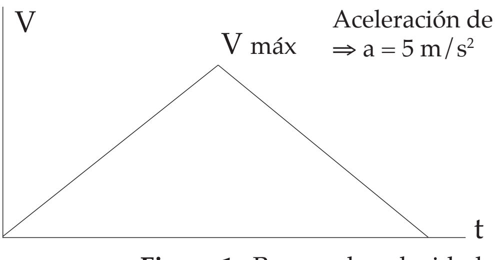
Definición de las variables del sistema y de sus valores

Al inicio del problema de selección se debe deben definir como mínimo las siguientes variables:

Mr = Masa de la carga a ser desplazada = 40Kg
t = Tiempo total requerido para el desplazamiento = 0.8 s
Dr = Desplazamiento total de la carga = 0.967m
Vm = Velocidad media de la carga = 1m/s
Vmáx = Velocidad máxima de la carga = 2m/s

Análisis cinemático y cinético

Se asume un perfil de velocidad triangular para estimar la potencia media necesaria para mover la carga.



Aceleración de la carga: Vmáx = at $\Rightarrow$ a = Vmáx/t
$\Rightarrow$ a = 5 m/s^2

Figura 1. Rampa de velocidad que se va a considerar

- Fuerza necesaria para mover la carga:

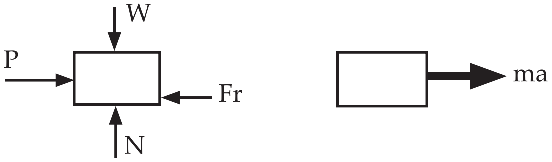


Figura 2. Diagrama de cuerpo libre de la carga

De acuerdo con la figura 2 se establecen las siguientes ecuaciones:

$\mathbf{P} - F_r = ma \Rightarrow \mathbf{P} = ma + \mu N$; Para acero sobre acero[1], $\mu = 0.05$
$\Rightarrow \mathbf{P} = 40(5) + 0.05(40)(9.8) \Rightarrow \underline{\mathbf{P} = 219.6\ \text{N}}$

- Potencia media necesaria para mover la carga:

(Pot)m = Potencia media = P*Vm
(Pot)m = 219.6*(1) $\Rightarrow$ **(Pot)m** = <u>219.6 vatios</u>

- Potencia requerida en el motor:

(Pot)motor = $(Pot)_m/(\eta_m \eta_T)$; η_m = Eficiencia del motor ; η_T = Eficiencia de la transmisión.
Se supone: $\eta_m = 0.9$ y $\eta_T = 0.85$.
(Pot)motor = 219.6/(0.9*0.85) $\Rightarrow$ **(Pot)motor** <u>= 287.1 vatios</u>

Toda la información anterior se empleará para hacer una preselección de accionamientos cuya conveniencia será evaluada mediante los métodos ya citados en los apartados siguientes.

2. POTENCIA TRANSITORIA Y ENERGÍA CINÉTICA DOBLE [Riba C. (1997)]

El accionamiento adecuado para una aplicación de desplazamientos rápidos tiene normalmente una potencia nominal de 2 a 6 veces mayor que la potencia media necesaria, debido a que el requerimiento crítico no es éste sino la rapidez con que puede entregar la potencia durante el transitorio. En consecuencia, se considerarán motores con potencia nominal por encima del siguiente valor mínimo en la selección.

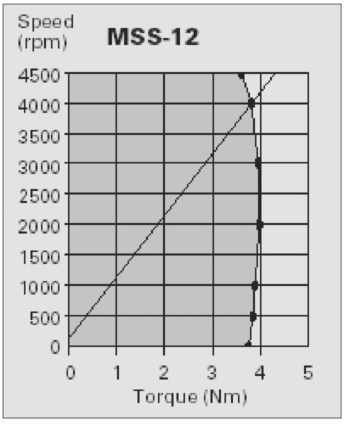
[1] Tabla 1, p. 3-28, *Manual del Ingeniero Mecánico de Marks*, 8ª edición.

Potencia para selección del motor = 2*287.1 = 574.1 vatios.

Después de un proceso iterativo con seis motores, finalmente se seleccionó un servomotor de CD marca Mavilor, con referencia MSS-12, las siguientes características y con la curva de par – velocidad mostrada. Por razones de espacio sólo se mostrará para éste último la aplicación del método citado.

Tabla 1
Características del motor

Velocidad media(N):	3000 RPM
Velocidad Máxima (Nmáx):	4500 RPM
Eficiencia (η_m):	83%
Par máximo (Ta):	3.95 N-m
Par promedio (T):	3.90 N-m
Par de fricción (Tf):	0.09 N-m
Cte de amortiguamiento (b):	1.91 X 10-4 N-m-seg/rad
Momento de inercia (Jm):	1.7 X 10-3 Kg-m^2
Potencia promedio (P):	1240 Watt
Voltaje en terminales (V):	106.7 Volt
Resistencia eléctrica (Ra):	0.75 Ω
Corriente (Ia):	14.0 Amp
Constante de voltaje (Kb):	0.295 Volt-seg/rad
Constante de par (Km):	0.295 N-m
Cte de tiempo mecánica (τ_m):	14.0 ms



Relación de transmisión óptima

Se considerará inicialmente que el movimiento se puede realizar con un perfil de velocidad triangular; en consecuencia, es importante determinar con qué relación de transmisión y con el motor ya indicado se minimiza el tiempo de movimiento, según Riba C. (1997):

$$i_{op} = \sqrt{\frac{Mr}{\eta J_m}}$$

; i_{op} = Relación de transmisión óptima ; Mr = Masa que se va a desplazar; $\eta = \eta_T = 0.95$ = Eficiencia de la transmisión; Jm = Momento de inercia del motor $\boldsymbol{i}_{op}$ $\underline{= 168.37\ m^{-1}}$

Con este valor y con los parámetros que se describen a continuación se determina el desplazamiento límite en la carga donde es conveniente el empleo de un perfil de velocidades triangular, según Riba C. (1997).

$(\delta_r)_{lím} = ((\omega_{máx})^2 * Je) \ / \ (t * Ta)$; J_e = Momento de inercia equivalente en el eje del motor, ωmáx = Velocidad angular máxima del motor; *Ta* = Par acelerador = Tm – Tr ; Tr = Par resistente de la carga; Tm = Par máximo suministrado por el motor

$$J_e = J_m + \frac{Mr}{\eta i^2} \text{ ; Je} = 1.91 \text{ X } 10^{-4} + 40/(0.95*168.37^2) \Rightarrow \mathbf{Je} = \underline{3.40*10^{-3} \text{ Kg-m}^2}$$

Considerando únicamente las inercias como la componente más importante de la carga, se define que el par para acelerar será suministrado por el motor (Ta = T**m)**

$$(\delta_r)lím = 471.23^2(3.40*10^{-3})/(168.37*3.95) \Rightarrow \boldsymbol{(\delta_r)lím} = \underline{1.1353\text{m}}$$

Debido a que el valor obtenido para el desplazamiento límite es mayor que el desplazamiento requerido (0.967 m), se confirma que el movimiento es conveniente realizarlo utilizando un perfil de velocidad triangular y una relación de transmisión óptima de 168.37 m^{-1}.

Representación en el plano de potencia transitoria – energía cinética doble

Haciendo uso de la modelación del sistema en MATLAB (ver anexo 1) se obtienen las curvas de la carga y del motor en el plano de potencia transitoria-energía cinética doble, en escala logarítmica (figura 3), considerando las condiciones establecidas en este el problema.

- Punto característico de la carga (C):

Éste queda definido por los valores de la potencia transitoria y la energía cinética doble demandadas por la carga cuando se emplea el perfil triangular. La energía cinética doble es:

Wr = Mr(Vmáx)^2 ⇒ **Wr** = 40(2.0)^2 ⇒ **Wr** = 160 joule
Y la Potencia transitoria:
PT = Mr(ar)^2 ; ar = a ⇒ **PT** =40(5)^2 ⇒ **PT** = 1.000 watt/s

Estos valores se grafican empleando escalas logarítmicas. El punto característico de la carga se encuentra identificado con la letra "C".

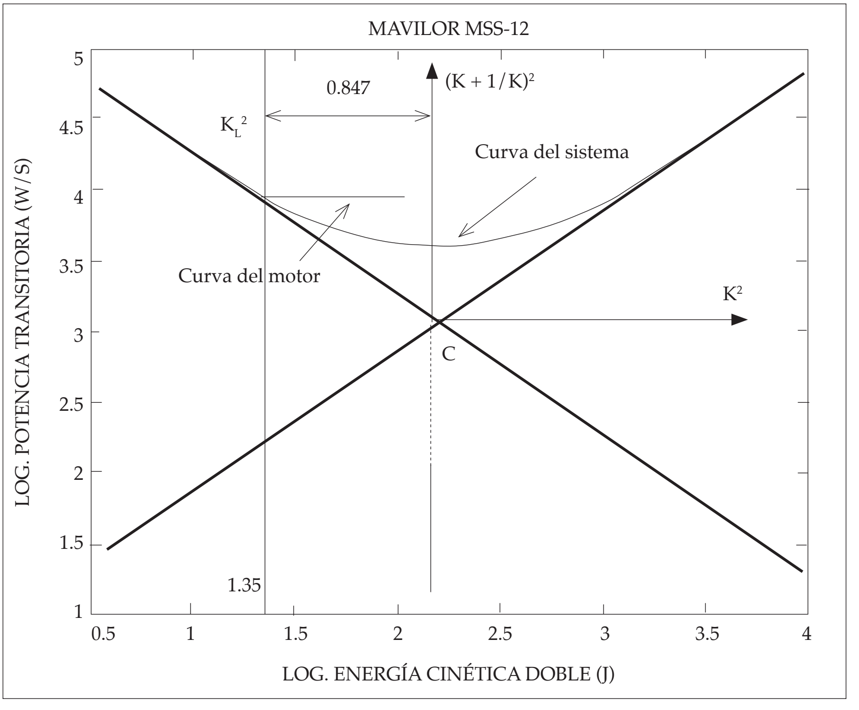


Figura 3. Curva de potencia transitoria y energía cinética doble para el motor Mavilor MSS-12

Determinación del K límite (KL)

La transmisión comercial escogida no necesariamente ofrecerá exactamente el valor de la transmisión óptima, razón por la cual se introduce el factor (K), que es el cociente entre la relación real y la óptima.

Se define el parámetro K_L como el menor valor de K que cumple con las necesidades de potencia transitoria y energía cinética doble.

Como se conoce, de acuerdo con Riba C. (1997), que la ecuación que describe el comportamiento de la potencia transitoria del sistema en función de K y el punto donde la curva del motor la intercepta, se puede encontrar el valor correspondiente de K.

$$\log\left(K+\frac{1}{k}\right)^2 = \log\left(P_i\right) - \log\left(PT\right)$$

Donde P_i es cualquier valor de potencia transitoria del motor, ya que el par es aproximadamente constante, y PT es la potencia transitoria de la carga.

Reemplazando P_i = 9178 W /s y PT = 1000 W/s, al eliminar los logaritmos y reordenando términos se obtiene la siguiente expresión:

$$K^4 - 7.18\,K^2 + 1 = 0$$

Resolviendo la ecuación para K^2 se encuentra que su valor límite es 0.142 y su logaritmo es -0.847, por lo tanto K**L**= 0.377.

Dado que K es igual al cociente (i/iópt), se puede obtener el mínimo valor para la relación de transmisión que cumple con los requerimientos de potencia transitoria. Al reemplazar el valor de la relación óptima se determina que i es de **63.48 m^{-1}**; por lo tanto, se debe buscar una relación de transmisión que esté en el intervalo de 63.48 y 168.37 y que satisfaga los demás requerimientos.

Se ha seleccionado un valor de relación de transmisión de 100, y se obtienen los siguientes resultados para la inercia equivalente (Je) y el desplazamiento límite (D**L**):

$$Je = 0.001997\ \text{Kg-m}^2 \ \Rightarrow\ D\mathbf{L} = 3.66\ \text{m}$$

El tiempo total estimado para lograr el desplazamiento requerido (Dr) utilizando rampa triangular se determina mediante la expresión $t_T = 2\sqrt{\dfrac{Dr(i)J_e}{Ta}}$; $t_T = 2\sqrt{\dfrac{0.967 * 100 * 0.0034}{3.95}}$; $\mathbf{t_T}$ = 0.799 s, de donde el tiempo en el proceso de aceleración es la mitad del tiempo de recorrido $\mathbf{t_1}$, lo que arrojó un valor de <u>0.3995 s</u>

- Aceleración alcanzada por la carga:

$$\delta_1 = a(t_1)^2/2 \ \Rightarrow \mathbf{a} = 2^*\delta_1/(t_1)^2 \Rightarrow\ \mathbf{a} = 2^*0.4835/0.3995^2 \Rightarrow\ \underline{\mathbf{a} = 6.059\ \text{m/s}^2}$$

- Aceleración del motor:

$$\alpha = ia \ \Rightarrow\ \alpha = 100^*6.059 \ \Rightarrow\ \alpha = 605.9\ \text{rad/s}^2$$

- Velocidad máxima alcanzada por la carga:

$$\mathbf{Vmáx} = \alpha t_1/i \ \Rightarrow\ \mathbf{Vmáx} = 605.9^*0.3995/100 \ \Rightarrow\ \mathbf{Vmáx} = \underline{2.42\ \text{m/s}}$$

- Fuerza impulsora requerida sobre la carga:

$$\mathbf{P} - F_{r} = ma \Rightarrow \mathbf{P} = ma + \mu N \text{ ; Para acero sobre acero}^{2},\ \mu = 0.05$$
$$\mathbf{P} = 40(6.059) + 0.05\,(40)(9.8) \Rightarrow \underline{\mathbf{P} = 261.9\ \text{N}}$$

- Par necesario para mover la carga:

$$(\text{Pot})m = T\omega;\ (\text{Pot})r = PVm;\ i = \omega / V; \text{ Asumiendo una eficiencia } \eta = 100\%,$$
$$(\text{Pot})m = (\text{Pot})_r = \text{Pot} \Rightarrow i = P/T \Rightarrow \mathbf{T} = P/i$$
$$\mathbf{T} = 261.9/100 \Rightarrow \mathbf{T} = 2.62\ \text{N-m}$$

Incluyendo las eficiencias del motor y de la transmisión, al igual que el par de fricción del motor, se obtiene:

$$\eta_m = 0.83 \quad ; \ \eta_T = 0.98 \ ; \ T\mathbf{f} = 0.09\ \text{N-m}$$
$$T = \frac{2.62}{\eta_m \eta_T} + 0.09 \quad \Rightarrow \underline{T = 3.31\ \text{N-m}}$$

Análisis del voltaje inducido (fcem)

Dado que se tiene una relación de transmisión de 100 m^{-1} y una velocidad máxima de la carga de 2.42 m/s, se puede ahora determinar la velocidad necesaria en el motor:

$$\omega\text{máx} = 2.42*100=242\ \text{rad/s}$$

De manera que con esto la fem inducida es igual a:

Emax = Kb*ωmáx; Kb: Constante de voltaje
Emax = 0.295*242 volt
Emax = 71.39 voltios

Que sumada con la caída debida a la resistencia eléctrica y a la inductancia resulta menor que el voltaje nominal entre terminales del motor (106.7 voltios ± 5%), con lo que se garantizaría unas adecuadas condiciones de operación para el motor.

[2] Tabla 1, p. 3-28, *Manual del Ingeniero Mecánico de Marks, op. cit.*

3. CONSTANTE DE TIEMPO ELECTROMECÁNICA

En este apartado se realiza una verificación complementaria de la escogencia del motor y la transmisión, utilizando el método de par-constante de tiempo, donde, por tanto, se incluyen el transitorio mecánico como el electromagnético.

Para un servomotor de CD con imán permanente controlado por tensión en la armadura (Anexo 2) y, utilizando la relación de transmisión de 100 m^{-1}, se determina la constante de tiempo según Maury H. (1998).

$$T_{em} = \frac{Ra * Je}{KmKb + Ra * b};\ T_{em} = \frac{0.75 * 0.0034}{0.295 * 0.295 + 0.75 * 2.0 * 10^{-4}}$$

$$Tem = 0.056 \text{ s};\ \underline{3\ Tem = 0.168 \text{ s}}$$

Dado que el triple de la constante de tiempo es inferior al tiempo requerido en aceleración (t_1 =0.3995s), se puede afirmar que el motor podrá desplazar la carga en las condiciones establecidas, sin ningún problema.

CONCLUSIONES

El método de relación de transmisión óptima permite obtener accionamientos que desarrollan el movimiento requerido dentro del tiempo requerido, pero los resultados logrados serán susceptibles de mejora, porque en dicho método no se incluye el transitorio electromagnético, lo que conduce a soluciones algo más voluminosas y relativamente más costosas.

El método de potencia transitoria es uno de los más conservadores y exigentes, porque permite identificar cuáles accionamientos serán incapaces de entregar la potencia con la rapidez exigida.

La información que normalmente es suministrada en los catálogos resulta insuficiente para modelar el sistema y determinar su constante de tiempo; particularmente se suelen omitir factores como, por ejemplo, los factores de amortiguamiento de naturaleza mecánica y electromagnética.

Cuando las características de un motor cumplen los requerimientos del sistema determinados con el método de potencia transitoria, se tiene la opción de escoger la relación de transmisión entre un intervalo de valores comprendido entre el óptimo y el definido por la intersección de la curva del sistema, o de accionamientos tangenciales, y la del accionamiento en el plano de potencia transitoria energía cinética doble.

Cuando se emplea el método de las constantes de tiempo es necesario verificar también que el motor sea capaz de suministrar el par suficiente para desplazar la carga.

Referencias

RIBA, Carles. *Selecció de Motors i Transmissions en el Projecte Mecànic*. Edicions UPC, 1997.

MAURY, Heriberto y RIBA, Carles. Constantes de tiempo en sistemas de accionamiento electromecánicos. *Anales de Ingeniería Mecánica*, año 12, Vol. 1, 1998.

EUGENE, Avallone and BAUMEISTER III, Theodore. *Marks Manual del Ingeniero Mecánico*, 9ª edición. McGraw-Hill.

MAURY, Heriberto. Notas de clase. Curso de accionamientos rápidos. Maestría en Ingeniería Mecánica Universidad del Norte, 2004.

DOMÉNECH, Carles *et al.* Comparative Análisis of triangular and trapezoidal speed diagrams as strategies for a rapid movements. *7th International Research/ Expert Conference "Trends in the Development of machinery and associated technology"*. Barcelona, España, septiembre de 2003.

PACHECO, J., MAURY, H. and RIBA, C. Numerical determination of time constant in an electromechanical drive system non-linear model based in stepper motors. COBEM, 2003.

ANEXO 1

```
%MAVILOR MSS-12
Mr=40;                          % Masa de la carga en Kg
Jm=1.7e-3;                      % Momento de inercia del motor en Kg-m^2
Ra =0.75 ; Km=0.295;Kb=0.295; b=2e-4;
N=0.83;Ta=3.95;Nt=0.98;
%RT=(Mr/(N*Jm))^(1/2);          % Relacion de transmision optima para rampa
triang.
RT=100;
Dr=0.967;                       % Desplazamiento requerido
Je=Jm+Mr/(N*RT^2);              % Momento de inercia equivalente
alfa=Ta/Je;                     % Aceleracion del motor
wmax=471.24;  % 4500 RPM        % Velocidad maxima del motor
DL=wmax^2*Je/(RT*Ta);           % Desplazamiento limite( PERFIL TRIANGULAR)
tT=2*(Dr*RT*Je/Ta)^(1/2);       % Tiempo total para la rampa triangular
t1=tT/2;
ar=2*(Dr/2)/t1^2;               % Aceleracion lineal de la carga
%ar=5;
alfa=RT*ar;                     % Aceleracion del motor
Vmax=alfa*t1/RT;                % Velocidad maxima de la carga
%Vmax=2;
Tfr=0.09;                       % Torque de friccion
%CALCULO DEL PAR REQUERIDO
P=Mr*ar+0.050*Mr*9.8;       T=P/(RT*N*Nt)+Tfr;
%CONSTANTE DE TIEMPO ELECTROMECANICA : Tem
Tem=Ra*Je/(Km*Kb+Ra*b);
%GRAFICA DE POTENCIA TRANSITORIA vs ENERGÍA CINÉTICA DOBLE
K=0.2;                          % Relacion de energias cineticas dobles
n=100;                          % Numero de puntos para graficar
Wr=Mr*2^2;                      % Energia cinetica doble de la carga
PT=Mr*5^2;                      % Potencia transitoria de la carga
x=1.2;
lob1=log10(PT)-log10(Wr);       % Intercepcion con el eje vertical
lob2=log10(PT)+log10(Wr);
for i=1:n;
X(i)=log10(K^2)+log10(Wr);
Y(i)=log10((K+1/K)^2)+log10(PT);
K=K+0.06;
X1(i)=x;
Y1(i)=lob1+X1(i);               % Recta con pendiente positiva
Y2(i)=lob2-X1(i);               % Recta con pendiente negativa
x=x+2.8/n;
end
%VALORES DE POTENCIA TRANSITORIA Y ENERGIA CINETICA DOBLE PARA
EL MOTPOR MSS12 DE MAVILOR
P3=3.95^2/Jm;
```

```
W3=Jm*253.1^2;                % 2416 RPM
P4=3.95^2/Jm;
W4=209.44^2*Jm;               % 2000
P5=3.95^2/Jm;
W5=104.72^2*Jm;               % 1000
P7=3.95^2/Jm;
W7=157.08^2*Jm;               % 1507
A=[W3,W4,W5,W7];    A=log10(A);
B=[P3,P4,P5,P7];    B=log10(B);
figure(1)    plot(X,Y,X1,Y1,X1,Y2,A,B)
```

ANEXO 2
DETERMINACIÓN DE LA CONSTANTE DE TIEMPO DEL SISTEMA

Análisis de los elementos que conforman el Sistema Electromecánico

- *Sistema mecánico*

Figura 1. Esquema del sistema electromecánico

Aplicando los principios básicos de la dinámica de cuerpos rígidos y llevando la carga y sus efectos hasta el lado del motor, que es el objeto del análisis, se tiene que:

$$M_m - M_{L/m} - M_{fricción} = J_e \frac{d\omega}{d\theta}$$

$$M_m >> M_{L/m}$$

$$J_e = J_m + \frac{M_L}{\eta i^2}$$

Despreciando el efecto del par producido por la carga sobre el motor y reemplazando el par debido a la fricción, se obtiene la siguiente expresión:

$$M_m = J_e \frac{d\omega}{dt} + b_e \omega$$

Aplicando transformada de Laplace a la ecuación diferencial queda de la forma:

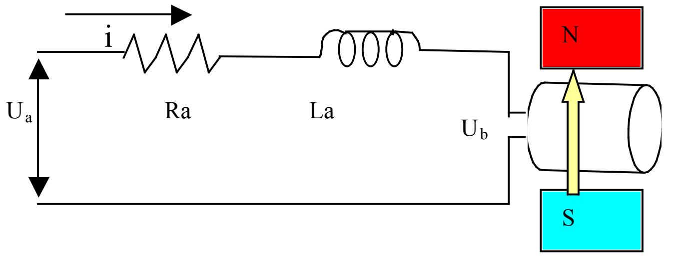
$$\Im\{M_m\} = J_e s\, \Im\{\omega\} + b_e\, \Im\{\omega\} + \omega\,(0)$$

Como el sistema parte del reposo:

$$M(s) = (J_e s + b_e)\,\omega\,(s)$$

- *Sistema eléctrico*

El motor seleccionado es un servo de corriente continua con imán permanente que se controlará por la armadura.



Aplicando la ley de los voltajes de Kirchoff, la ley de Ohm y teniendo en cuenta la presencia de la fcem, se obtiene la ecuación diferencial del sistema eléctrico

$$E(t) = U_a - U_b = i_a R_a + L_a \frac{di_a}{dt}$$

U_b es la fuerza contra electromotriz debida a la interacción entre el campo magnético producido por los imanes y el movimiento del rotor.

Aplicando transformada de Laplace se obtiene la siguiente expresión:

$$E(s) = (R_a + Ls)\, I_a\, (s)$$

- *Sistema magnético*

El sistema magnético es el que nos permite enlazar el sistema mecánico con el sistema eléctrico.

Por una parte, tenemos que el par suministrado por este tipo de motores es una función directa del flujo magnético y de la corriente que circula por la armadura.

$M_m = K\phi i_a$. En la práctica, los fabricantes de motores suministran una constante de par (K_m), que representa el producto entre los dos primeros términos de la ecuación, $M_m = K_m i_a$.

El segundo efecto electromagnético es la generación de una fcem, la cual es proporcional a la velocidad de rotación del motor:

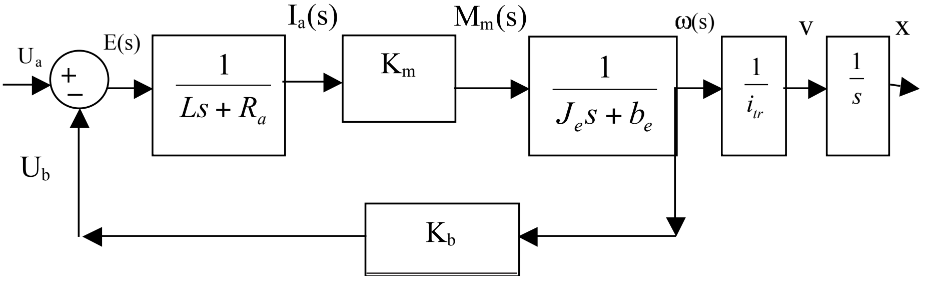
$$U_b = K_b \omega_m$$

Aplicando transformada de Laplace a las dos expresiones anteriores se obtiene:

$$M_m(s)=K_m I_a(s) \quad y \quad U_b(s)=K_b \omega_m(s)$$

Análisis integrado del Sistema Electromecánico

Las partes que conforman al sistema electromecánico son las que se ilustran en la figura 1. El diagrama de bloques correspondientes para este sistema en el que se controla la velocidad de la carga es el siguiente:



Aplicando algebra de bloques para determinar la función de transferencia se obtiene:

$\omega(s) = \left[\frac{K_m}{(R_a + Ls)(j_e s + b)}\right]\left[U_a - K_b \omega(s)\right]$, agrupando la velocidad angular y dividiendo entre el voltaje aplicado se llega a la expresión:

$\frac{\omega(s)}{U_a} = \frac{K_m}{Lj_e s^2 + (R_a j_t + Lb)s + (K_m K_b + R_a b)}$, dado que la inductancia es muy pequeña, este término se elimina de la ecuación y queda de la forma:

$$\boxed{\frac{\omega(s)}{U_a} = \frac{K_m}{R_a J_e s + (K_m K_b + R_a b)}}$$

Para determinar la constante de tiempo se obtiene la raíz del denominador. El inverso del negativo de esta raíz corresponde a la constante de tiempo de todo el sistema electromecánico:

$$\boxed{T_{em} = \frac{Ra * Je}{KmKb + Ra * b}}$$