

Intensidad de un haz de luz con momento angular orbital entero y no entero en campo lejano

Intensity of a beam with integer and non-integer charge angular orbital momentum in far field

Cristian Hernando Acevedo Cáceres*
 Carlos Fernando Díaz Meza**
 Yezid Torres Moreno***
Universidad Industrial de Santander (Colombia)

* Msc. en Física, estudiante de doctorado en Física, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga (Colombia). *crstncvd8@gmail.com*

** Msc. en Ingeniería Electrónica, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga (Colombia). *marck177@hotmail.com*

*** Doctor en Óptica y Tratamiento de la Señal, profesor titular laureado, Grupo de Óptica y Tratamiento de Señales (GOIS), Escuela de Física, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga (Colombia). *ytorres@uis.edu.co*

Correspondencia: Escuela de Física, Universidad Industrial de Santander, carrera 27, calle 9, edificio Camilo Torres, A.A. 678, Bucaramanga (Colombia). Tel. (57 7)6344000, ext. 2743.

Resumen

La forma del patrón de intensidad en campo lejano de un haz luminoso con un valor bien definido de momento angular orbital entero y no entero es analizada teórica y experimentalmente. Mediante simulaciones numéricas de una onda plana difractada por un holograma en forma de tenedor se calcula para los haces con momento angular orbital entero m el radio promedio del anillo interno del haz en el régimen de Fraunhofer, mientras que para los haces con momento angular orbital no entero M se analiza la rotación de la distribución de intensidad en el campo lejano difractado provocada por el giro de la discontinuidad en el holograma en forma de tenedor. Los resultados experimentales de la forma del patrón de difracción en campo lejano de un haz con momento angular orbital entero y no entero producto de hacer incidir una onda electromagnética plana sobre un holograma computarizado en forma de tenedor desplegado sobre un modulador espacial de luz son presentados para corroborar los resultados teóricos.

Palabras clave: momento angular orbital, campo lejano y holograma tenedor.

Abstract

The far-field intensity pattern of a light beam with a defined value of orbital angular momentum is analyzed theoretically and experimentally. Using numerical simulations of a wave plane diffracted through of a hologram with fork shape, we calculate the mean radius of the inner ring for beams with integer orbital angular momentum in the Fraunhofer regime. For beams with non integer orbital angular momentum, we study the rotation on the far field intensity pattern diffracted produced by the dislocation phase over the fork hologram. Additionally, experimental results are presented for the far field diffraction pattern for beams with integer OAM and non-integer OAM, product of an electromagnetic wave incident on a fork hologram written on a spatial light modulator.

Keywords: orbital angular momentum, far-field regime and Fork-shaped hologram.

Fecha de recepción: 24 de mayo de 2013
Fecha de aceptación: 3 de marzo de 2014

1. INTRODUCCIÓN

La electrodinámica ha identificado de manera diferenciada el momento angular espín (MAS) y el momento angular orbital (MAO) de una onda electromagnética [1]. Desde 1936 se conocía que un haz propagándose poseía un momento angular espín debido a su polarización [2], sin embargo, solo fue hasta los trabajos de Allen et al. [3] y de Berry [4] cuando se explica por primera vez la propagación de un haz con un momento angular orbital entero y no entero, respectivamente; asociando en ambos casos la estructura de fase del frente de onda de la radiación electromagnética.

El análisis del momento angular orbital entero y no entero es extremadamente importante debido a sus aplicaciones muy conocidas en los campos de la manipulación usando luz a través de pinzas ópticas [5], [6], [7], [8] y la codificación de información [9], [10], [11], [12], aunque también existen algunas aplicaciones menos conocidas, como el mejoramiento de fronteras en el procesamiento de imágenes [13], [14].

Para generar haces con MAO son muy utilizadas las técnicas de hologramas en forma de tenedor [15], [16] y placas de espiral de fase [17], [18]. Pero son los hologramas en forma de tenedor, cuando son desplegados mediante un MEL, los que han sido ampliamente utilizados, en gran parte debido a su versatilidad en la dinámica de manipulación y asignación de cambios [19], [20].

En este artículo de investigación se estudia y verifica experimentalmente los resultados numéricos de la distribución de intensidad de un haz con MAO entero y no entero obtenido mediante la difracción en campo lejano de un haz plano sobre un holograma en forma de tenedor desplegado sobre un MEL con un valor bien definido de MAO entero y no entero [4]. Además se muestra cómo la razón entre los valores de radio teórico y radio promedio experimental para los haces con MAO entero en campo lejano tienen una gran similitud. Finalmente, mediante simulaciones numéricas y resultados experimentales se demuestra cómo la rotación de la discontinuidad de fase en el holograma en forma de tenedor no entero corresponde a la misma rotación del patrón de intensidad del haz con MAO no entero M .

2. METODOLOGÍA

La metodología de este trabajo fue dividida en una parte teórica y un montaje experimental para corroborar o contradecir las consideraciones predichas en la formulación teórica acerca del MAO en campo lejano.

Formulación teórica

A continuación se describe brevemente el método teórico utilizado para evaluar numéricamente la intensidad de un haz con MAO entero y no entero en campo lejano.

Momento angular orbital entero

Un haz luminoso con un momento angular orbital entero puede ser obtenido mediante la difracción de una onda electromagnética gaussiana de la forma $U^{(i)}(r, \varphi, \epsilon) = e^{-ik(\epsilon + \frac{r^2}{2q(\epsilon)})}$, siendo $q(\epsilon)$ el parámetro complejo del haz [21] sobre un holograma en forma de tenedor con función de transmitancia en coordenadas cilíndricas $T(r, \theta)$ [22] y momento angular orbital entero o carga topológica entera m , tal como se muestra en la parte izquierda de la figura 1 es el eje de propagación.

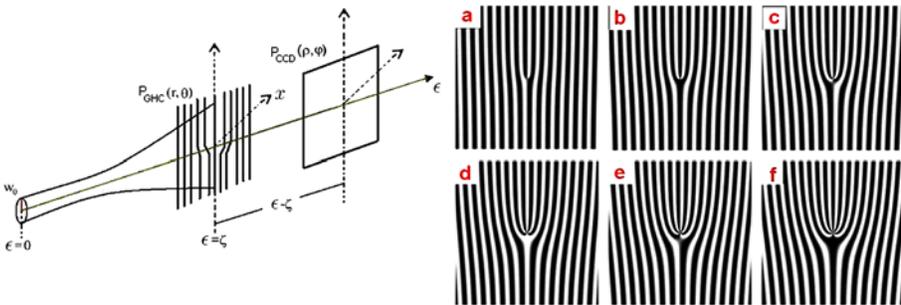


Figura 1. Izquierda: geometría del problema para la difracción de un haz con MAO. Derecha: hologramas (a-f) con carga topológica entera desde $m=1$ hasta $m=6$, respectivamente.

Por otra parte, los hologramas numéricos binarios en forma de tenedor, como los mostrados en la parte derecha de la figura 1, pueden ser generados

por la interferencia de una onda plana de referencia e^{ikx} y una onda objeto con estructura de fase $e^{im\theta}$, es decir,

$$H = |e^{ikx} + e^{im\theta}|^2 = 2[1 + \cos(kx - m\theta)] \quad (1)$$

Así que cuando estos registros holográficos son iluminados con la onda gaussiana, el campo resultante en el régimen de Fraunhofer es proporcional a la transformada de Fourier estándar TF , del producto de la función gaussiana y la función de transmitancia H . Por tanto, la intensidad en un plano lo suficientemente alejado del holograma será

$$I = [TF(U^{(i)}H)]^2 \quad (2)$$

Esta expresión es posteriormente evaluada utilizando las funciones de transformada de Fourier estándar de Matlab™ para diferentes valores enteros de m .

Momento angular orbital no entero

Un haz con un momento angular orbital no entero puede ser obtenido mediante la difracción de la onda gaussiana $U^{(i)}$ sobre un holograma en forma de tenedor con carga topológica M , donde $M=m+\mu$, siendo μ la parte no entera de M con valor acotado entre 0 y 1. Estos hologramas en forma de tenedor no entero pueden ser generados numéricamente en forma análoga a los obtenidos para un haz con MAO entero, solo que esta vez se cambia m en M , es decir,

$$H_1 = |e^{ikx} + e^{iM\theta}|^2 = 2[1 + \cos(kx - M\theta)] \quad (3)$$

A partir de la ecuación anterior son obtenidos diferentes hologramas no enteros con cargas topológicas que varían en pasos de 0,2 desde $M=6,0$ en la figura 2(a) hasta $M=7,0$ en la figura 2(f). Siguiendo la anterior secuencia de figuras puede notarse cómo el centro del holograma se desplaza lentamente hacia la izquierda en intervalos de $2\pi/5$ entre cada imagen, hasta llegar a la última de ellas, donde aparece un nuevo diente y corresponde a un aumento en la fase del tenedor de 2π ; aquí la representación gráfica de los hologramas se hace en amplitud para efectos de visualización.

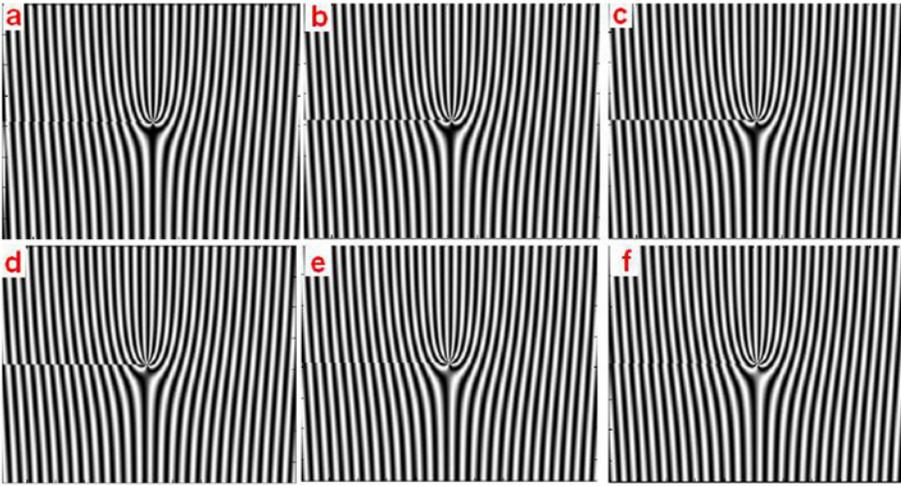


Figura 2. Hologramas, representados en amplitud, con carga topológica desde $M=6,0$ hasta $M=7,0$ a intervalos de $0,2$.

De manera que cuando se ilumina con la onda electromagnética gaussiana los hologramas no enteros, la intensidad en un plano lejano desde el holograma está dada de manera similar por

$$I = [TF(U^{(i)}H_1)]^2 \quad (4)$$

Análogamente al MAO entero, esta última expresión será evaluada utilizando Matlab™ para diferentes valores no enteros de M .

Montaje experimental

Se ha usado el montaje experimental mostrado en la figura 3 para analizar la intensidad de los haces con MAO entero m y no entero M en campo lejano. Un láser diodo (Holoeye, 533[nm], $P_{max}=1[mW]$) como fuente de luz monocromática, que tiene además una lente colimadora ajustable al diámetro del haz de iluminación deseado. Para desplegar los hologramas numéricos en forma de tenedor, como los mostrados en las figura 1 y 2, es utilizado un MEL que consta de una matriz de cristal líquido (CRLOpto, 1024(H) x768(V) pixeles), el cual ha sido insertado en medio de dos polarizadores. Polarizador y analizador orientados a valores angulares previamente encontrados experimentalmente de 84 y 224° , respectivamente, con el fin de optimizar la

operación de la matriz en el modo acoplado en intensidad [26]. Finalmente, en la adquisición es utilizada una cámara CCD (Edmund Optics, EO-1312c, tamaño de pixel: $4.65 \mu\text{m} \times 4.65 \mu\text{m}$) para obtener y almacenar las imágenes del primer orden de difracción $n=1$ de los haces con MAO entero y no entero.

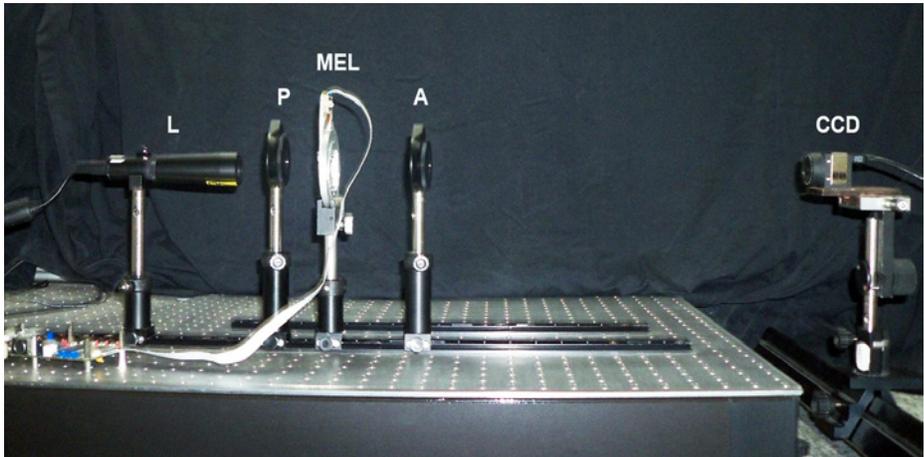


Figura 3. Sistema experimental para las medidas de intensidad: láser (L), polarizador (P), modulador espacial de luz (MEL), analizador (A) y cámara CCD. La cámara CCD ha sido desplazada a la izquierda para efectos de la toma fotográfica.

3. RESULTADOS Y ANÁLISIS

Resultados teóricos

Evaluando la expresión (2), por ejemplo, para una carga topológica entera $m=6$ es obtenido el perfil de intensidad global mostrado en la parte superior de la figura 4. Como puede apreciarse, la intensidad obtenida tiene una zona central u orden de difracción $n=0$ junto con dos zonas adyacentes a cada lado, que son los órdenes de difracción $n=1$ y $n=-1$ y que corresponden a haces luminosos con momentos angulares orbitales enteros $m=6$ y $m=-6$, respectivamente. Se puede observar que la intensidad es la misma para los dos haces simétricos con MAO entero, tal y como se aprecia en la parte inferior de la misma figura; puede notarse adicionalmente que ambos haces con MAO entero constan de un anillo central o principal muy luminoso rodeado por anillos concéntricos, los cuales son resultado de los

efectos difractivos de la singularidad inicial en el centro y a la altura del holograma desplegado, es decir, a la fase $2\pi m$ del ángulo acimutal que forma la circunferencia alrededor del campo óptico.

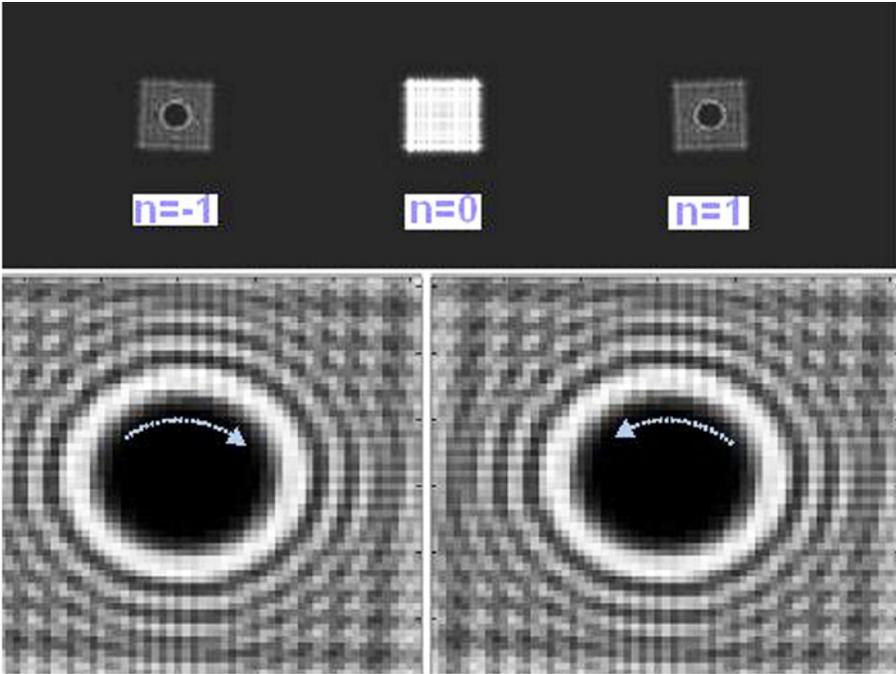


Figura 4. Superior: simulación numérica de la intensidad obtenida en la ecuación 2. Inferior: detalle de los órdenes de difracción con MAO entero $m=6$ derecha e izquierda $m=-6$.

Aunque la distribución de intensidad sea la misma para ambos haces, su distribución de fase rota en sentidos opuestos. Para $m=6$ rota en contra de las manecillas del reloj (figura 2, parte inferior derecha), mientras que para $m=-6$ (figura 2, parte inferior izquierda) lo hace a favor de las manecillas del reloj, el haz luminoso se propaga hacia afuera de la superficie del papel. Lo anterior puede explicarse si se considera que la onda gaussiana contiene a la onda plana usada para registrar el holograma y, por tanto, puede ser utilizada para reconstruir la onda objeto.

Posteriormente son obtenidos los perfiles de intensidad mostrados en la figura 5 para diferentes valores de MAO entero m y al primer orden de difracción $n=1$.

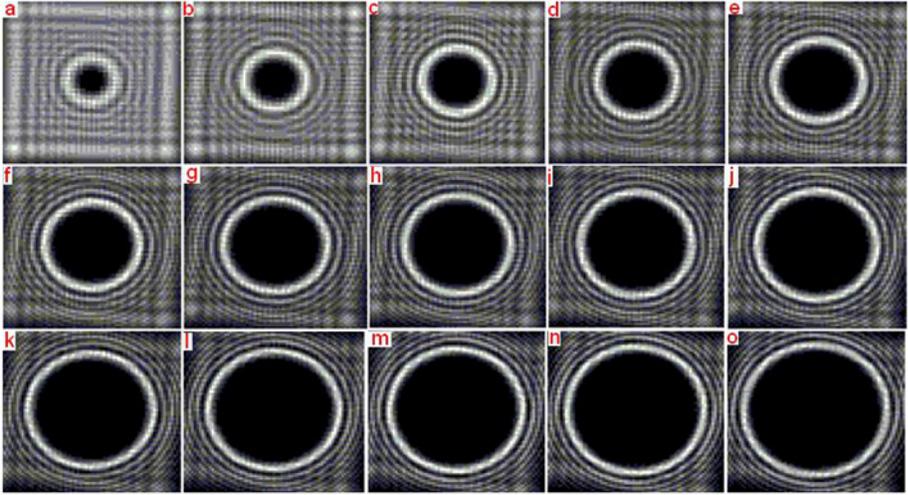


Figura 5. a-o: resultados de la simulación numérica de campo lejano para haces con MAO entero $m=2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28$ y 30 , respectivamente, en el primer orden de difracción.

Es posible estimar el radio teórico del anillo principal de un haz con MAO entero en campo lejano si se utiliza el hecho que el radio del primer orden de difracción positivo o negativo para el campo lejano se puede escribir como [23]

$$\rho_{\pm m} = w(\epsilon) \sqrt{2 \frac{|m|(|m| + 1)}{|m| + 2}} \quad (5)$$

Donde $w(\epsilon)$ es el radio transversal del haz a la distancia ϵ . Ahora, puesto que la abertura difractante es el pixel de la matriz de cristal líquido del MEL, y considerando el criterio de difracción de Fraunhofer [24] a una distancia de $\epsilon - \xi = 4,08$ [m] para un láser con longitud de onda 533 [nm], en la tercera columna de la tabla 1 se muestran los valores teóricos de los radios para diferentes valores de MAO entero.

Por otra parte, si se evalúa la expresión (4) por ejemplo $M=6,5$, entonces se obtiene la intensidad global mostrada en la parte superior de la figura 6. En esta figura se observa cómo el perfil de intensidad obtenido corresponde de nuevo al orden de difracción central $n=0$ junto a dos órdenes de difracción adyacentes, $n=1$ y $n=-1$, que poseen momentos angulares orbitales no

enteros $M=6, 5$ y $M=-6,5$, respectivamente. En esta figura es posible notar que en la intensidad de ambos haces adyacentes al orden cero aparece una línea casi central al lado derecho, como se muestra en la parte inferior de la figura 6, para los perfiles amplificados y detallados de estos haces. Dicha línea es consecuencia de una superposición de haces con MAO entero alternante, en correspondencia con los resultados reportados en la referencia [25]. Un haz con MAO no entero es la suma infinita de haces con MAO entero debidamente ponderados y con un factor de propagación asociado. De nuevo, para ambas figuras aparece un casianillo principal rodeado por casianillos concéntricos, originados, como se mencionó previamente, por efectos difractivos de la singularidad inicial en el centro del holograma desplegado en el MEL.

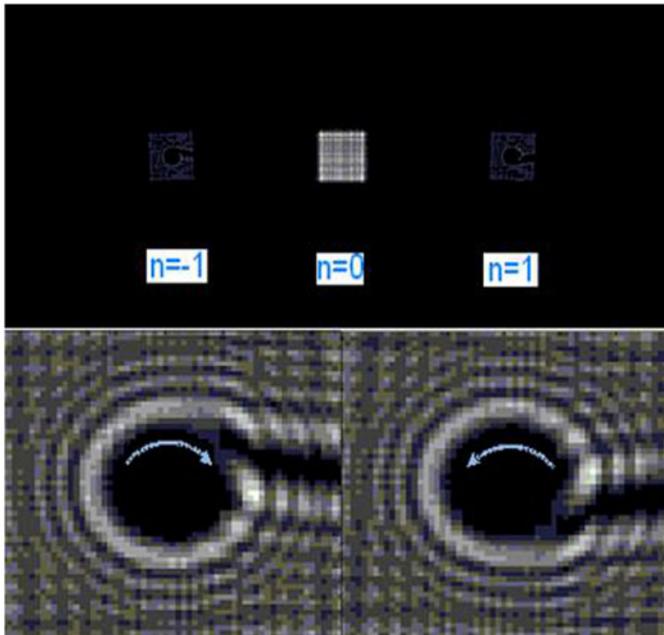


Figura 6. Superior: resultados de la simulación de la intensidad obtenida de la ecuación (4). Inferior: detalle de los órdenes de difracción +1 y -1 con MAO no entero $M=6,5$ y $M=-6,5$, respectivamente.

Adicionalmente, en la parte inferior de la anterior figura puede notarse cómo la distribución de fase rota en sentidos opuestos, provocando que para el haz con MAO no entero $M=6,5$ la línea de carga alternante se encuentre

casi en 2π radianes, mientras que para el haz con MAO no entero $M=-6,5$ la línea alternante se forme casi en 0 radianes.

La figura 7 muestra la evolución del valor de M a intervalos de 0,1 entre los enteros 15 y 16; partiendo del entero $m=15$, también puede apreciarse la formación de la línea casi central en la parte derecha conforme el valor de M es cada vez más cercano al valor semientero $\mu=+1/2$, mientras que dicha línea se extingue en la medida en que el valor de M es más cercano al entero siguiente $m+1$.

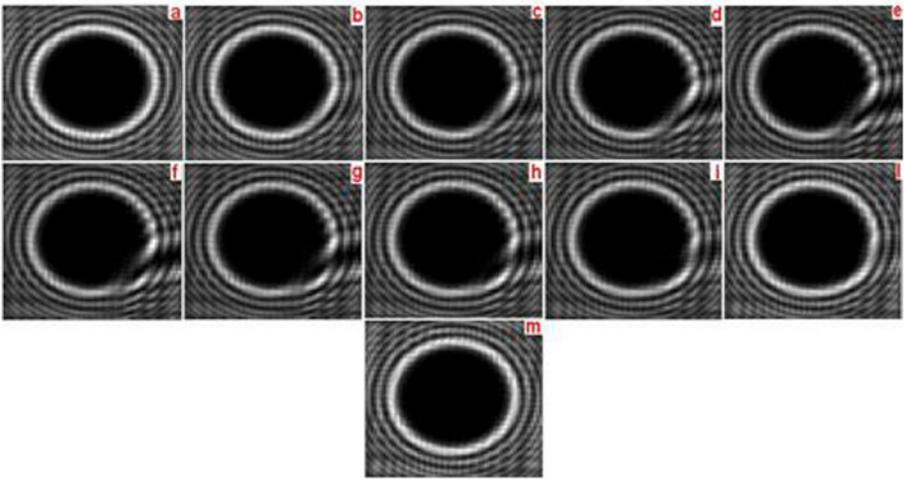


Figura 7. Resultados de la simulación de la intensidad obtenida de la ecuación (6) para los valores (a-e) $M=15,0, 15,1, 15,2, 15,3$ y $15,4$, (f-m) $M= 15,5, 15,6, 15,7, 15,8, 15,9$ y $16,0$.

De otro lado, es posible hallar el perfil de intensidad de los haces con MAO no entero al rotar intencionalmente la dislocación de fase en el holograma, tal como se muestra en la parte izquierda de la figura 8 para una rotación de 45° . De acuerdo con lo anterior son calculados y evaluados numéricamente los perfiles de intensidad para $M=6,5$ y rotaciones de la singularidad de fase de $45, 90, 135$ y 180° (parte derecha de la figura 8) en a, b, c y d, respectivamente. En estas figuras se aprecia que la rotación en el patrón de la intensidad en campo lejano es igual a la rotación de la singularidad de fase.

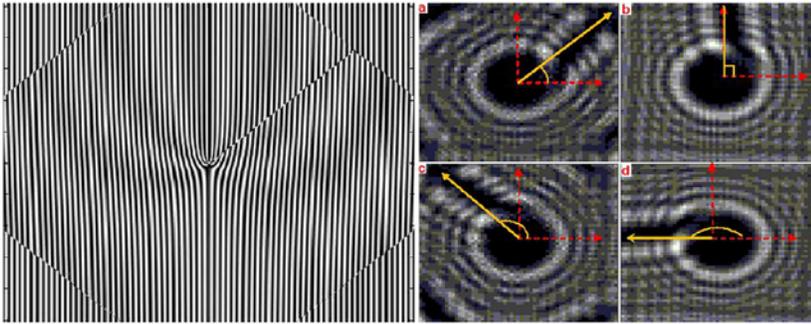


Figura 8. *Izquierda:* rotación de la singularidad de fase en el holograma de tenedor no entero con $M=6,5$ a un ángulo de 45° . *Derecha:* (a-d) perfiles de intensidad obtenidos para rotaciones de $45, 90, 135$ y 180° de la singularidad de fase del holograma de tenedor no entero con $M=6,5$, respectivamente.

Resultados experimentales

En la figura 9 se muestran los perfiles de intensidad experimentales de haces con MAO entero desde $m=2$ hasta $m=30$ en intervalos de 2, para una distancia de propagación desde el MEL hasta la CCD de $C - \xi = 4,08$ [m]. En estos perfiles de intensidad se aprecia la correspondencia con lo predicho teóricamente referente a la formación de un anillo central rodeado de anillos concéntricos secundarios, tal como se muestra en las figuras 5(a)-5(o). Para los anteriores haces, la rotación de su distribución de fase está en contra de las manecillas del reloj cuando el haz luminoso se propaga hacia afuera de la superficie del papel.

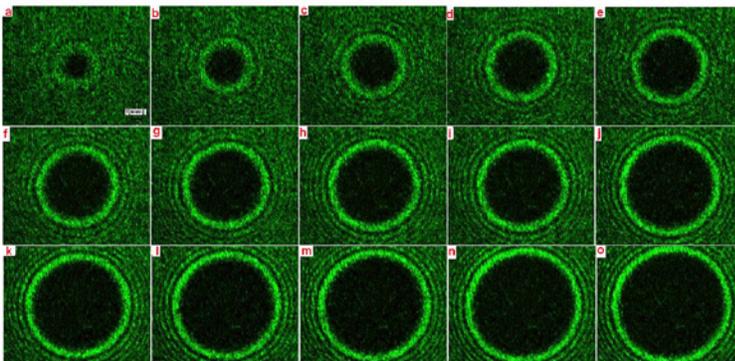


Figura 9. Figuras (a-o): perfiles experimentales de campo lejano para haces con MAO entero $m=2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28$ y 30 , respectivamente.

No obstante, para estas mismas figuras con MAO entero es posible estimar el radio promedio experimental del anillo central utilizando una circunferencia inscrita numéricamente y ajustada al valor promedio del radio del anillo central, tal como se muestra en las figuras 10(a) y 10(b). De esta manera, el radio experimental del anillo es la multiplicación del radio en pixeles del anillo de la imagen por el tamaño real del pixel de la cámara CCD. Aplicando este procedimiento a cada imagen de los haces con MAO entero de la figura 9 son obtenidos los valores de la columna 2 de la tabla 1. Ahora, sí se halla la razón entre estos valores experimentales de radio y los obtenidos utilizando la ecuación (2) (mostrados en la columna 3), se encuentra que su razón es muy cercana a la unidad, con un error que no supera el $\pm 9\%$. La exactitud entre los valores experimentales y teóricos puede ser mejorada sustancialmente si la aproximación de campo lejano es ajustada; se ha supuesto para los valores experimentales que la abertura difractante es solo el pixel cuyo tamaño es de algunas micras, y no toma en cuenta, por ejemplo, la abertura de la matriz cuyo tamaño es de algunos milímetros. Y como consecuencia, posee un régimen de campo lejano que supera la distancia de observación inicialmente calculada.

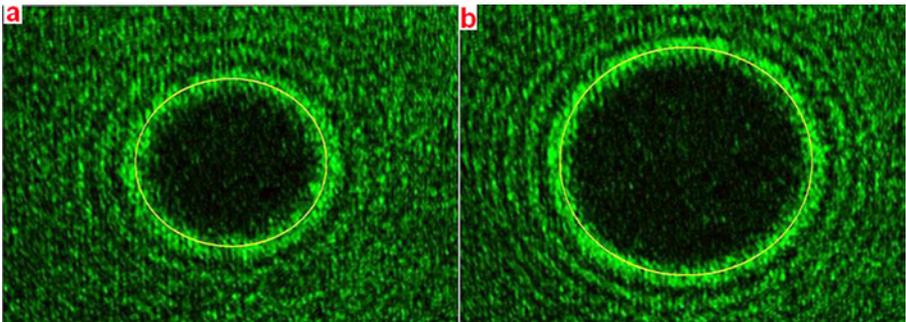


Figura 10. Figuras (a-b): imágenes experimentales con circunferencia inscrita para cargas topológicas de $m=8$ y $m=16$, respectivamente.

Radio teóricos y experimentales de haces con MAO

Tabla 1. Valores de radios promedio teóricos y experimentales obtenidos para diferentes valores enteros de MAO con la respectiva razón entre ellos

m	Exper. [mm]	Teórico [mm]	Razón (Teór/Exper)
2	1.38	1.48	1.07
4	2.17	2.21	1.01
6	2.58	2.77	1.07
8	2.86	3.24	1.13
10	3.16	3.66	1.16
12	3.42	4.04	1.18
14	3.70	4.38	1.18
16	4.00	4.70	1.17
18	4.27	5.00	1.17
20	4.53	5.28	1.16
22	4.79	5.55	1.16
24	5.03	5.81	1.15
26	5.27	6.05	1.15
28	5.40	6.29	1.16
30	5.63	6.52	1.16

De otra parte, utilizando el mismo esquema experimental de la figura 3 son obtenidos los perfiles de intensidad de un haz con un MAO no entero desde $M=15,0$ (figura 11(a)) hasta $M=16,0$ (figura 11(m)) en intervalos de 0,1, para una distancia de propagación desde el MEL hasta la CCD de $\zeta - \xi = 4,08$ [m]. En estos perfiles se muestra la concordancia entre lo predicho por las simulaciones teóricas de la figura 7 y lo encontrado en los resultados experimentales de la figura 11 en relación con la formación de una línea central que se acentúa conforme M es más cercano al semientero $\mu=+1/2$ y se extingue conforme M se acerca al entero siguiente $m+1$. Adicionalmente, se puede observar de nuevo la formación de casanillos secundarios que rodean a un casanillo principal.

Finalmente, para un haz con MAO no entero $M=6,5$ se muestran los perfiles de intensidad experimentales obtenidos al rotar intencionalmente la dislocación de fase del holograma de tenedor en los valores de 45, 90, 135 y 180°, como se aprecia en la figura 12 (a), (b), (c) y (d), respectivamente. En cada una de estas figuras puede notarse que la rotación del patrón de

intensidad corresponde a la rotación de la dislocación de fase, en concordancia con lo predicho por las simulaciones numéricas mostradas en la parte derecha de la figura 8.

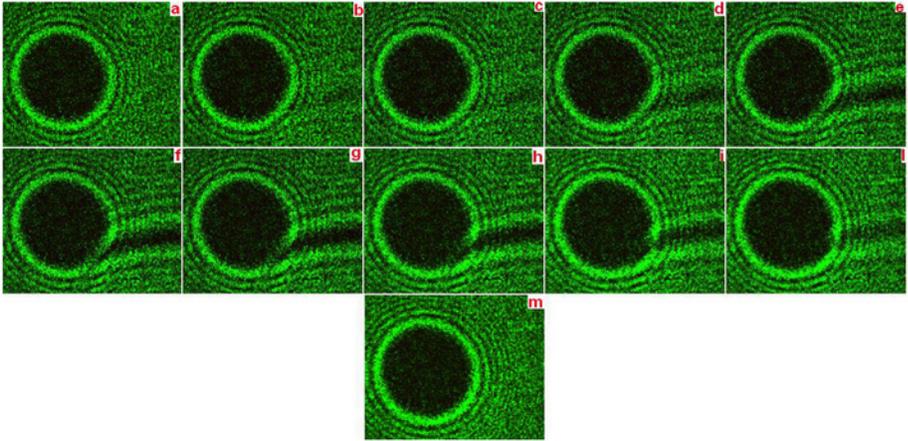


Figura 11. Imágenes experimentales en intensidad: (a-e) $M=15,0, 15,1, 15,3$ y $15,4$ e (f-m) $M =15,5, 15,6, 15,7, 15,8, 15,9$ y $16,0$.

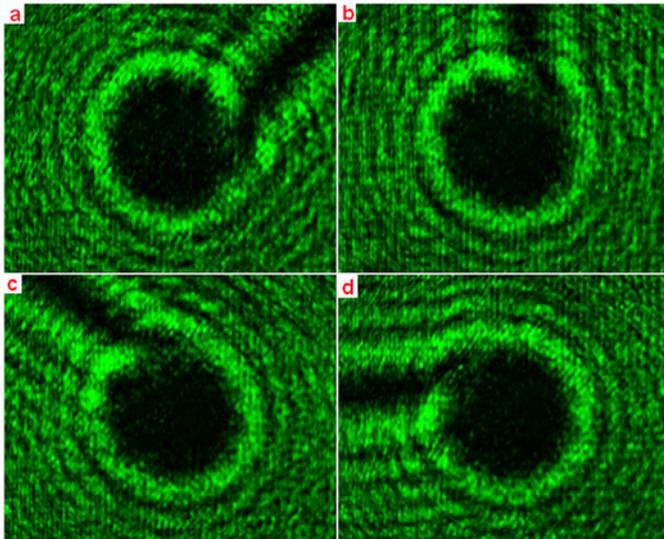


Figura 12. Figuras (a-d): perfiles experimentales de campo lejano para rotaciones de $45, 90, 135$ y 180° de la singularidad de fase del holograma de tenedor no entero con $M=6,5$, respectivamente.

CONCLUSIONES

En este trabajo se mostró que las simulaciones numéricas que describen los patrones de intensidad de un haz con MAO entero y no entero, producto de la difracción en campo lejano de un frente de onda plano sobre un holograma computarizado en forma de tenedor desplegado sobre un MEL, están en exacta correspondencia con los perfiles de intensidad experimentales encontrados para los mismos valores de MAO entero y no entero descritos. Además, para los haces con valor m se aprecia que los valores de radio promedio teórico y experimental guardan una estrecha similitud, con un error que no supera el $\pm 9\%$, mientras que para los haces con carga no entera se muestra que una rotación de la dislocación de fase en el holograma corresponde a la misma rotación del patrón de intensidad del haz en campo lejano.

Agradecimientos

Esta investigación es financiada por la Vicerrectoría de Investigación y Extensión (VIE) de la Universidad Industrial de Santander a través del programa de apoyo a la consolidación de los grupos de investigación año 2012, con el proyecto *Modelo optoelectrónico generador de momentos angulares orbitales enteros y/o fraccionales*, código 5191/5803; con el proyecto con código 5708 de la convocatoria del año 2013, *Momento angular orbital y momento angular de spin de la luz en la base de ondas cilíndricas*. Al patrimonio autónomo Fondo Nacional de Financiamiento para la Ciencia, la Tecnología y la Innovación, Francisco José de Caldas (Colciencias), por su apoyo económico a través del proyecto *Dispositivos ópticos para sistemas de alta dimensionalidad QKD basados en el momento angular orbital de la luz* (código 110256934957), resultado de la convocatoria nacional para conformar un banco de proyectos para la ciencia, tecnología e innovación, año 2102.

REFERENCIAS

- [1] J. D. Jackson, "Plane electromagnetic waves and wave propagation", in *Classical electrodynamics*, 3th ed. New York: John Wiley & Sons Inc., 1998, pp. 295-299.
- [2] R. Beth, "Mechanical detection and measurement of the angular momentum of light", *Physics Review*, vol. 50, n° 2, pp. 115-125, 1936.
- [3] L. Allen *et al.*, "Orbital angular momentum of light and transformation of Laguerre-Gaussian Laser Modes", *Physical Review A*, vol. 45, n° 11, pp. 8185-8189, 1992.

- [4] M. Berry, "Optical vortices evolving from helicoidal integer and fractional phase steps", *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*, vol. 6, n° 2, pp. 259-268, 2004.
- [5] S. Sato *et al.*, "Optical trapping and rotational manipulation of the microscopic particles and biological cells using higher-order mode nd:yag laser beams", *Electronic Letters*, vol. 27, n° 10, pp. 1831-1832, 1991.
- [6] J. Grieve *et al.*, "Hands-on with optical tweezers: a multitouch interface for holographic optical trapping", *Optics Express*, vol. 17, n° 5, pp. 3595-3602, 2009.
- [7] T. Tao *et al.*, "3D trapping and manipulation of micro-particles using optical tweezers with optimized computer-generated holograms", *Chinese Optics Letters*, vol. 9, n° 12, pp. 120010-120015, 2011.
- [8] A. Arias *et al.*, "Simultaneous rotation, orientation and displacement control of birefringent micro particles in holographic optical tweezers", *Optics Express*, vol. 21, n° 1, pp. 102-11, 2013.
- [9] G. Gibson *et al.*, "Free-space information transfer using light beams carrying orbital angular momentum", *Optics Express*, vol. 12, n° 22, pp. 5448-5455, 2004.
- [10] A. Gatto *et al.*, "Free-space orbital angular momentum division multiplexing with Bessel beams", *Journal of Optics*, vol. 13, n° 6, pp. 0640181-0640182, 2011.
- [11] C. F. Meza *et al.*, "Modelado preliminar de un codificador optoelectrónico para la transferencia de datos sobre el momento angular orbital de la luz", *Revista UIS-Ingeniería*, vol. 11, n° 1, pp. 35-43, 2012.
- [12] E. Karimi *et al.*, "Time-division multiplexing of the orbital angular momentum of light", *Optics letters*, vol. 37, n° 2, pp. 127-129, 2012.
- [13] G. Swartzlander, "The optical vortex lens", *Optics and Photonics News*, vol. 17, n° 11, pp. 39-43, 2006.
- [14] I. Augustyniak *et al.*, "New scanning technique for the optical vortex microscope", *Applied Optics*, vol. 41, n° 10, pp. 117-124, 2012.
- [15] V. Bazhenov *et al.*, "Laser beams with screw dislocations in their wavefronts" *American Institute of Physics*, vol. 52, n° 8, pp. 429-431, 1990.
- [16] N. Heckenberg *et al.*, "Laser beams with singularities", *Optical and Quantum Electronics*, vol. 24, n° 9, pp. S951-S962, 1992.
- [17] H. Garcia *et al.*, "Diffraction of wave planes by finite-radius spiral phase wave plates of integer and fractional topological charge", *Journal Optical Society of America A*, vol. 26, n° 4, 794-803, 2009.
- [18] M. Uchida and A. Tonomura, "Generation of the electro beams carrying orbital angular momentum", *nature*, vol. 464, n° 7289, pp. 737-739, 2010.

- [19] L. Allen, M. Padgett and M. Babiker, "The orbital angular momentum of light", in *Progress in Optics XXXIX*, Ed. Amsterdam, Netherlands: Elsevier Science B.V., 1999, ch 4, sec. 5, pp. 313-315.
- [20] P. Jia *et al.*, "Side lobe-modulated optical vortices for free-space communication", vol. 38, n° 4, pp. 588-590, 2013.
- [21] H. Kogelnik and T. Li, "Laser beams and resonators", *Applied Optics*, vol. 5, n° 10, pp. 1550-1567, 1966.
- [22] G. Brand, "Phase singularities in beams", *American Journal Physics*, vol. 67, n° . 1, pp. 55-60, 1999.
- [23] L. Janicijevic and S. Topuzoski, "Fresnel and Fraunhofer diffraction of a Gaussian laser beam by fork-shaped gratings", *Journal Optical Society of America A*, vol. 25, n° 11, pp. 2659-2669, 2008. DOI: <http://dx.doi.org/10.1364/JOSAA.25.002659>
- [24] J. W. Goodman, "Fresnel and Fraunhofer diffraction", in *Introduction to Fourier Optics*, 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1996, pp. 73-75.
- [25] J. Gotte *et al.*, "Light beams with fractional orbital angular momentum and their vortex structure", *Optics Express*, vol. 16, n° 2, pp. 993-1006, 2008.
- [26] W. Osten *et al.*, "Evaluation and application of spatial light modulators for the optical metrology", *Óptica Pura y Aplicada*, vol. 38, n° 3, pp. 71-81, 2005.