

Dinámica hamiltoniana y control por modos deslizantes del Péndulo de Furuta

Hamiltonian dynamics and sliding-mode control of Furuta's Pendulum

Francisco Javier Ibargüen*
Jairo Andrés Morales**
John Alexander Moreno***
Jaiber Evelio Cardona****
Pablo Andrés Muñoz*****

* Ingeniero Electricista, Magíster en Automática, Universidad del Valle, Profesor asistente, Facultad de Ingeniería, Universidad del Quindío, Armenia (Colombia). fjibarguen@uniquindio.edu.co

Correspondencia: Universidad del Quindío, Bloque de Ingeniería, Programa de Ingeniería Electrónica. Cra. 15 Cl. 12N Teléfono: (6)7460100 ext. 256

** Ingeniero Electrónico, Universidad del Quindío, programador páginas Web, Magical Designs, Armenia (Colombia). andresm@magicaldesings.com

*** Ingeniero Electrónico, Universidad del Quindío, Ingeniero de Soporte II, DETECSA, Cali (Colombia). johnmoreno@detecsa.com

**** Ingeniero Electrónico, Magíster en Automática, Universidad del Valle, Cali (Colombia). Profesor asistente, Facultad de Ingeniería, Universidad del Quindío, Armenia (Colombia). jaibercardona@uniquindio.edu.co

***** Ingeniero Electrónico, Universidad Nacional de Colombia Sede Manizales. Magíster en Ingeniería Eléctrica, Universidad Tecnológica de Pereira. Profesor auxiliar, Facultad de Ciencias Básicas y Tecnología de la Universidad del Quindío, Armenia (Colombia). pamunoz@uniquindio.edu.co

Apoyo y subvenciones: Proyecto patrocinado y apoyado por la Universidad del Quindío.

Resumen

En este artículo se analiza la dinámica hamiltoniana para un tipo de sistema no lineal subactuado, aplicado particularmente al Péndulo de Furuta. Se aplica una estrategia de control no lineal a partir de los modos deslizantes y moldeo de energía potencial, que permite con una sola ley de control elevar y sostener el Péndulo en su posición vertical. Este experimento fue implementado en la planta mencionada, la cual fue diseñada y construida como un modelo experimental para la línea de investigación de Sistemas No Lineales y Percepción del Programa de Ingeniería Electrónica de la Universidad del Quindío.

Palabras clave: Modos deslizantes, sistemas hamiltonianos, Péndulo de Furuta, moldeo de energía potencial.

Abstract

In this paper we made the analysis of Hamiltonian dynamics for a type of nonlinear underactuated system. The mathematical model of the Furuta's pendulum is calculated. A nonlinear control strategy by sliding modes and potential shaping is applied to the Furuta's pendulum plant designed and built as experimental model for the Nonlinear Systems and Perception investigation line of the Electronic Engineering Program of the Quindío University.

Keywords: Sliding modes, hamiltonian systems, Furuta's pendulum, potential energy shaping.

Fecha de recepción: 4 de agosto de 2008
Fecha de aceptación: 3 de agosto de 2009

1. INTRODUCCIÓN

El control basado en la estructura hamiltoniana [1], [2] está fundamentado en el uso de funciones de energía que determinan el comportamiento del sistema en cada instante de tiempo a partir de sus parámetros físicos; así que esto ayuda al diseñador a comprender mejor lo que está sucediendo con la planta que debe controlar y entrega un criterio para la correcta selección del controlador que va a implementar. Esto contribuye en el análisis de nuevas técnicas de modelado y control de sistemas no lineales. El estudio de los sistemas de control por modos deslizantes ha sido de mucho interés en la comunidad científica durante las últimas dos décadas debido a su buen comportamiento ante variaciones de los parámetros y el rechazo a perturbaciones [3] - [5], por lo que se usa este método de control para estabilizar el Péndulo en la posición de equilibrio inestable. El Péndulo de Furuta es un sistema no lineal que presenta un comportamiento dinámico

complejo, por lo que conviene enfatizar en teorías matemáticas y físicas de nivel avanzado en ingeniería, que permitan obtener mayores niveles de abstracción en el análisis de este tipo de sistemas. Las primeras estrategias de control aplicadas a este tipo de sistemas consistían en llevar de forma manual el Péndulo a la posición de equilibrio inestable y ejecutar allí una estrategia de control lineal. En la actualidad ha surgido un problema de control más general y complejo conocido como *swing up* [6] - [9], que consiste en llevar el Péndulo desde cualquier posición, y en particular desde la posición colgante, hasta la posición deseada. En este trabajo se aplica una ley de control que lleva el Péndulo de la posición colgante a la posición objetivo (equilibrio inestable) y lo estabiliza allí mediante la inyección y amortiguamiento de energía basado en un modelo de orden dos [6], [10]. En la sección 2 se presenta el modelo matemático del sistema Péndulo de Furuta y se realiza una reducción del modelo de cuatro dimensiones a uno de dos, teniendo en cuenta que las variables del brazo se consideran cíclicas. En la sección 3 se diseña el controlador y se analizan las simulaciones de éste en Matlab®, y por último, en la sección 4 se presentan los resultados experimentales de este control sobre la planta Péndulo de Furuta.

2. METODOLOGÍA

Inicialmente se realiza un análisis de la dinámica del sistema denominado Péndulo de Furuta, a través del enfoque hamiltoniano, posteriormente se hace una aproximación al control por moldeo de energía y modos deslizantes.

Modelado del Sistema

El modelo matemático del sistema dinámico se calcula realizando la transformación de Legendre a la función lagrangiana del sistema, para obtener la función hamiltoniana que se observa en (1) [11].

Recientemente se han realizado análisis del Péndulo de Furuta (figura 1) de orden reducido, basados únicamente en un modelo de dimensión dos. Este modelo aproximado del sistema consiste en dejar de lado la dinámica del brazo, es decir, los pares de reacción del Péndulo al brazo o soporte.

$$\begin{aligned}
 H = & \frac{[(2p_1(\beta + \sigma \sin^2 q_1) - \gamma p_2 \cos q_1) p_1 + (2\alpha p_2 - \gamma p_1)p_2]}{4\alpha(\beta + \sigma \sin^2 q_1) - \gamma^2 \cos^2 q_1} \\
 & - \frac{[(\alpha + \beta + \sigma \sin^2 q_1)(2p_1(\beta + \sigma \sin^2 q_1) - \gamma p_2 \cos q_1)^2]}{(4\alpha(\beta + \sigma \sin^2 q_1) - \gamma^2 \cos^2 q_1)^2} \\
 & + \frac{[\gamma(2\alpha p_2 - \gamma p_1)(2p_1(\beta + \sigma \sin^2 q_1) - \gamma p_2 \cos q_1)]}{(4\alpha(\beta + \sigma \sin^2 q_1) - \gamma^2 \cos^2 q_1)^2} - \varepsilon \cos q_1
 \end{aligned} \tag{1}$$

Donde $\alpha = \frac{1}{2}(J_b + \frac{1}{4}ml^2)$, $\beta = \frac{1}{2}(J_b + mR^2)$, $\gamma = \frac{1}{2} mlR$, $\sigma = \frac{1}{8} ml^2$ y $\varepsilon = \frac{1}{2} mgl$ son constantes.

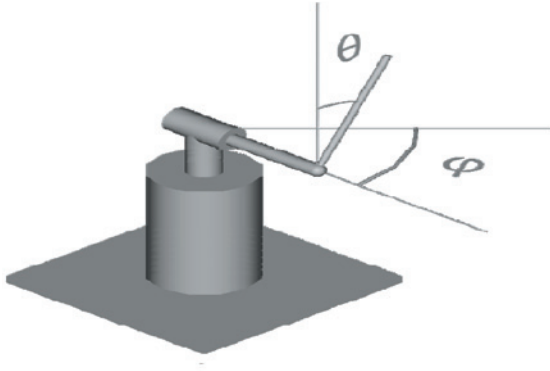


Figura 1. Péndulo de Furuta

Lo anterior es posible porque la coordenada q_2 correspondiente a la posición del brazo es cíclica, por lo tanto, el lagrangiano no depende de ésta, es decir que el momento conjugado p_2 se conserva y es una constante de movimiento [12]; la aparición de una coordenada cíclica en la formulación hamiltoniana de un sistema dinámico genera una reducción en el orden del sistema de ecuaciones acopladas igual a dos, así el espacio de fase se reduce a dos dimensiones [13]. Otra razón es que los puntos de equilibrio se determinan por el cambio de energía potencial del Péndulo, pues el brazo mantiene un valor constante de energía potencial, además el brazo puede considerarse como un pivote móvil de un Péndulo planar. Por último, se debe tener en cuenta la complejidad matemática del sistema de orden cuatro para realizar el control. Considerando lo anterior, en la ecuación (2) se presenta el modelo de orden dos de la dinámica del sistema usando el formalismo hamiltoniano:

$$H_r(q, p) = \frac{3}{l^2} p^2 + mg \frac{l}{2} \cos q \quad (2)$$

Las ecuaciones de Hamilton correspondientes se muestran en las ecuaciones (3) y (4):

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = mg \frac{l}{2} \cos q \quad (3)$$

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{6}{l^2} p \quad (4)$$

Con las ecuaciones (3) y (4) se genera el plano de fase de la figura (2).

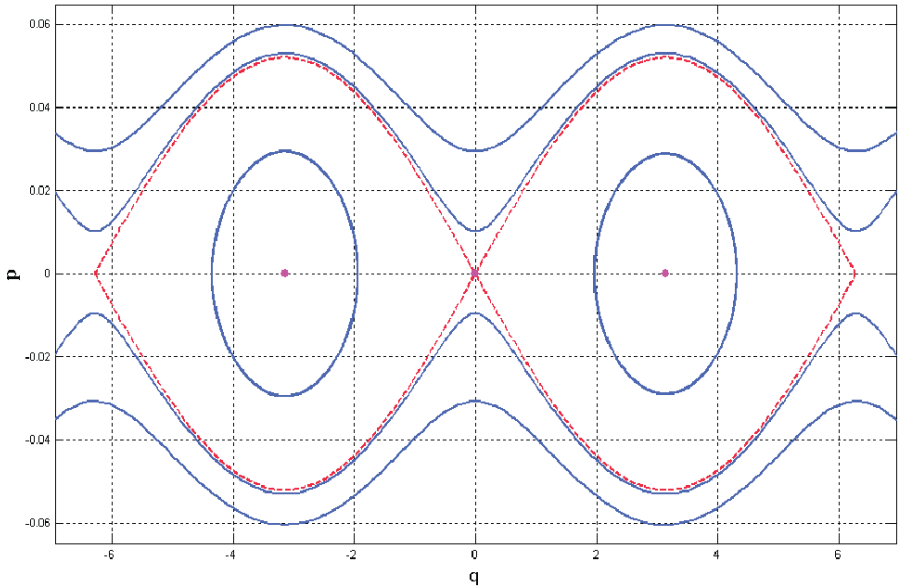


Figura 2. Plano de fase del modelo de orden reducido del Péndulo de Furuta

En la figura 2 se observa un punto de equilibrio inestable correspondiente a la posición de máxima energía potencial del Péndulo, donde las trayectorias que cruzan este punto se alejan y se convierten en trayectorias inestables (líneas punteadas). Además, existen dos puntos de equilibrio estables correspondientes a la posición de mínima energía potencial del Péndulo (uno es

reflejo del otro por la simetría de q), en los que las trayectorias cercanas a estos puntos permanecen allí describiendo órbitas homoclinas [14].

Diseño del Controlador

Los sistemas de control por estructura variable son caracterizados por una ley de control discontinua, que produce una conmutación que hace que las trayectorias del sistema permanezcan sobre una superficie dada S en el espacio de fase. La estructura del controlador es variada intencionalmente para obtener una dinámica deseada en el sistema. En una primera fase, llamada fase de alcance, la trayectoria que comienza en una condición inicial arbitraria se mueve hacia la superficie de deslizamiento; en la siguiente fase, el movimiento se restringe a la superficie de deslizamiento, por esto se llama fase de deslizamiento o modo deslizante [4]. En la fase de deslizamiento se genera un fenómeno indeseado de amplitud y frecuencia finita llamado *chattering*, producido por la interacción entre las dinámicas parásitas y el control por estructura variable. Una característica importante de los sistemas de control por estructura variable consiste en que en la fase de deslizamiento la dinámica del sistema está determinada por los parámetros de diseño y las ecuaciones que definen la superficie, y son insensibles a las variaciones de los parámetros del sistema y a perturbaciones externas [5].

Para obtener un buen comportamiento en la dinámica de los sistemas de estructura variable se asume que el sistema consta de varios subsistemas llamados estructuras; cada una de esas estructuras son inaceptables desde el punto de vista de la calidad del proceso de control, pues se consideran como inestabilidades. El diseño de un controlador consiste en seleccionar los parámetros para esas estructuras, como también definir la lógica de conmutación, de tal modo que las características útiles de las estructuras se conserven. En los momentos en que las estructuras cambien, las ecuaciones diferenciales que describen el movimiento del sistema presentarán discontinuidades en ciertas superficies del espacio de estado del sistema. Esta es precisamente la introducción de un modo deslizante dentro del sistema que es el fundamento de los algoritmos de control en esta clase de plantas [3].

Los sistemas hamiltonianos han sido objeto de estudio en el área del control basado en la energía, donde se analiza en la ley de control qué términos

mantiene la energía constante, cuáles tienen un efecto disipativo y cuáles inyectan energía al sistema [2]. El procedimiento que se utiliza es el moldeo de energía (*Energy Shaping*), que moldea o da forma a la superficie n-dimensional de la función de energía en lazo cerrado, haciendo que esta función sea definida positiva en todo el rango de funcionamiento y cero en el punto o conjunto de puntos que se desean estabilizar. El objetivo del método de moldeo de energía potencial es cambiar, mediante la introducción de una ley de control u , la forma de la energía potencial del sistema, de manera que el mínimo de la misma se encuentre en el punto que se desea estabilizar [15], [16]. Con el fin de encontrar e introducir una ley de control u para moldear la energía potencial del sistema se propone una función de energía deseada basada en el hamiltoniano del sistema de orden reducido [17], [18]. Por simplicidad en el diseño se toman los parámetros de las ecuaciones iguales a la unidad, con lo que la energía deseada es igual a (5):

$$H_d(q, p) = V_d(q) + \frac{1}{2} p^2 \quad (5)$$

En lazo cerrado, lo que se pretende es que el sistema tenga la forma de (6) [19]:

$$\dot{r} = (J - R) \frac{\partial H_d}{\partial r} \quad (6)$$

Donde $J = -J^T$ es la matriz fundamental de la estructura simpléctica [20], y $R = R^T$, definida positiva, es una matriz de amortiguamiento de energía. El sistema hamiltoniano en su notación matricial es (7):

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial H_d}{\partial q} \\ \frac{\partial H_d}{\partial p} \end{bmatrix} \quad (7)$$

El término σ puede ser una función. Ahora, teniendo en cuenta la simetría del Péndulo de Furuta y para $\sigma = 0$ se debe cumplir (8):

$$V_d = V_d(-q), \text{ y } \frac{\partial V_d(q)}{\partial q} = - \frac{\partial V_d(-q)}{\partial q} \quad (8)$$

Una función que cumple con la condición de simetría par impuesta por la ecuación (8) es (9) [9]:

$$V_d(q) = a_0 + \cos q - \sum_{n=2}^{\infty} a_n \cos^n q \quad (9)$$

Esta representación en serie de cosenos garantiza la existencia de máximos o mínimos locales de la energía potencial en el punto de equilibrio deseado. El signo negativo en la ecuación (9) garantiza que existan mínimos locales en la posición deseada. La región cercana al punto de equilibrio local introducido por la ecuación (9) se reduce a medida que aumenta el número de armónicos, además aparecen máximos y mínimos locales en regiones indeseadas, por lo tanto se escoge el armónico correspondiente a $n = 2$ y $a_0 = 0$, y se obtiene (10):

$$V_d(q) = \cos q - a_2 \cos^2 q \quad (10)$$

con $a_2 = a > 0.5$.

La figura 3 muestra un mínimo de energía potencial en el punto que se desea estabilizar para $a = 3$.

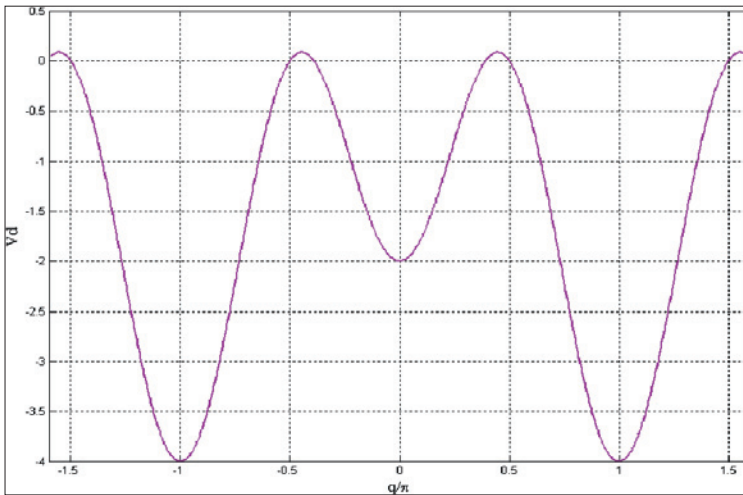


Figura 3. Función de energía potencial deseada

La figura 4 muestra la forma de la función hamiltoniana correspondiente, donde se puede observar que para todo $a > 0.5$ se tiene un mínimo local de la energía del sistema en la posición deseada ($q = 0$).

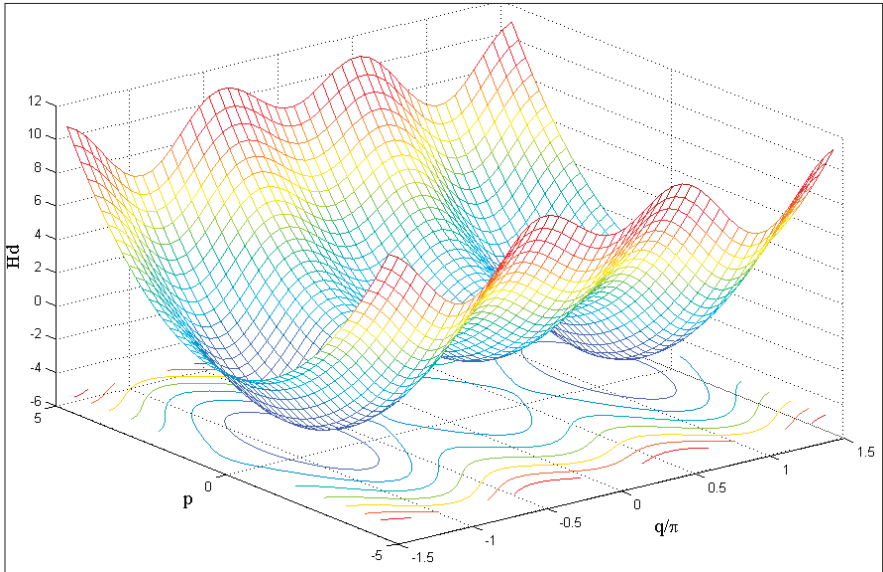


Figura 4. Función hamiltoniana deseada

La figura 5 muestra el contorno del plano de fase, donde se pueden ver tres pozos de energía: dos pozos laterales correspondientes a la posición colgante ($q = \pm \pi$) y un pozo central que surge después de moldear la energía potencial del sistema. Los pozos laterales son niveles de energía indeseados en el plano de fase, de los que el sistema debe salir mediante la inyección de energía hacia el pozo deseado, donde se amortigua o absorbe la energía que aún lleva el Péndulo en su trayectoria de movimiento. Con el amortiguamiento, la energía tiende a un valor mínimo, como se ve en la figura 3, y el Péndulo se mantiene en la posición deseada con una cantidad de movimiento nula $(q, p) = (0, 0)$.

Es de vital importancia observar los límites de los pozos de energía deseados e indeseados, puesto que más adelante se introducirá el modo deslizante teniendo en cuenta la ubicación de estos límites.

Tomando en cuenta el amortiguamiento, con $\sigma \neq 0$, se toma la expresión $k \cos q$ para éste, siendo $k > 0$, lo que significa que cuando el Péndulo está por debajo de la horizontal ($\cos q < 0$) entonces se inyecta energía; por otro lado, cuando se encuentra por encima de la horizontal ($\cos q > 0$), la energía se atenúa. El sistema deseado en la forma hamiltoniana generalizada será (11):

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -k \cos q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial H_d}{\partial q} \\ \frac{\partial H_d}{\partial p} \end{bmatrix} \quad (11)$$

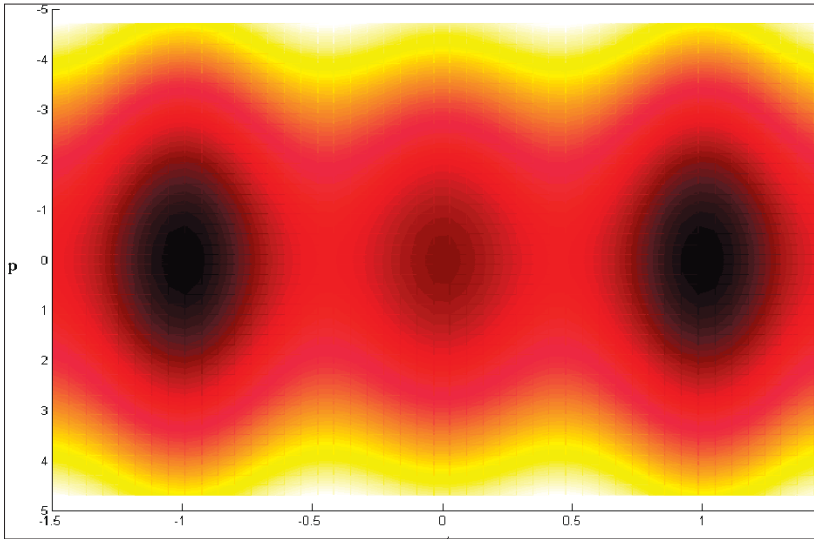


Figura 5. Contorno del plano de fase en lazo cerrado

Así, el sistema de ecuaciones deseado se muestra en (12) y (13):

$$\dot{q} = p \quad (12)$$

$$\dot{p} = \sin q - 2a \cos q \sin q - kp \cos q \quad (13)$$

Para inyectar energía sólo cuando se encuentre dentro del pozo indeseado, y amortiguar sólo cuando el Péndulo se encuentre en el pozo deseado, es necesario establecer una lógica de conmutación que opere en los límites de los pozos mostrados en la figura 5; se define (14):

$$\Psi(q, p) = \begin{cases} -K & \text{si } \left(\cos q < \frac{1}{2a} \text{ y } H_d \leq \frac{1}{4a} \right) \\ K & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (14)$$

Donde $K > 0$ es un parámetro de sintonización.

Esto quiere decir que Ψ es negativa en los pozos indeseados (inyección de energía) y positiva en el pozo deseado (amortiguamiento). Sustituyendo la ecuación (14) en la ecuación (13) y multiplicando por $\cos q$ para evitar los cambios de signo del amortiguamiento al pasar por la horizontal, el sistema deseado se muestra en (15) y (16):

$$\dot{q} = p \quad (15)$$

$$\dot{p} = \sin q - 2a \cos q \sin q - \Psi(q, p)p \cos^2 q \quad (16)$$

Con esto se tiene la ley de control (17):

$$u = -2a \cos q \sin q - K\Psi(q, p)p \cos^2 q \quad (17)$$

que lleva el sistema a la posición de equilibrio deseada. En la ecuación (17) se puede ver cómo se genera el modo deslizante a lo largo de la curva de conmutación, dado que la función $\Psi(q, p)$ cambia sus valores a lo largo de la superficie de deslizamiento [7].

A continuación se analiza el sistema dinámico Péndulo de Furuta controlado con la ley de control (17) utilizando Simulink® de Matlab®. La figura 6 muestra cómo el Péndulo se desplaza desde la posición colgante hasta la posición vertical (hacia arriba) y se estabiliza allí en 6.7s. Se puede notar la acción del modo deslizante por la oscilación del Péndulo alrededor de la posición objetivo, lo que se ha llamado *chattering*; esto obliga al controlador a realizar un mayor esfuerzo de control, lo que podría reducir la vida útil del motor.

Para evitar este efecto indeseado, la curva de conmutación mostrada en el figura 5 se cambia aplicando (18):

$$Hd = \frac{1}{4a} + \Delta \quad (0 < \Delta \ll 1) \quad (18)$$

Y se obtiene una superficie de energía de un valor más alto. El movimiento de deslizamiento se presenta ahora a lo largo de la nueva curva, aunque los puntos de equilibrio $(\pm \arccos(1/2a), 0)$ aún existen, pero están fuera de la superficie de deslizamiento, por lo tanto el modo deslizante no estabilizará estos puntos de equilibrio y el *chattering* disminuirá. Aplicando lo anterior al controlador se obtienen las señales que se observan en la figura 7. El

comportamiento del sistema no presenta grandes variaciones en comparación con las señales mostradas en la figura 6, pero puede notarse la disminución del *chattering*.

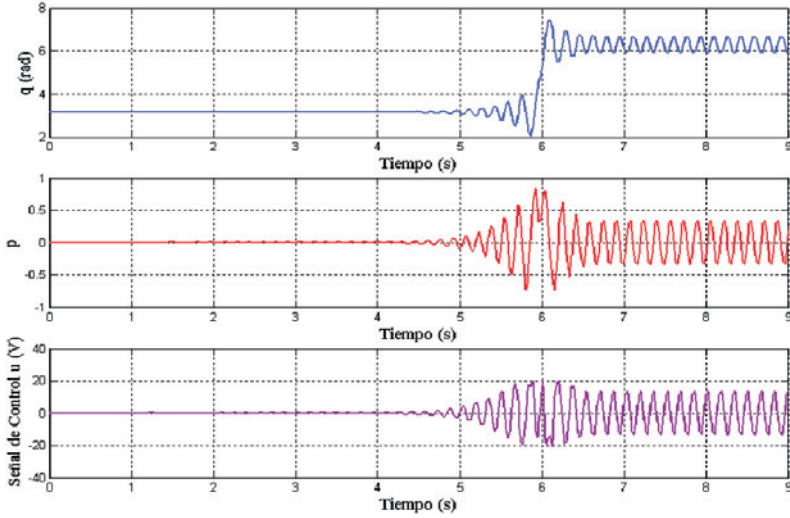


Figura 6. Señales del sistema dinámico y control

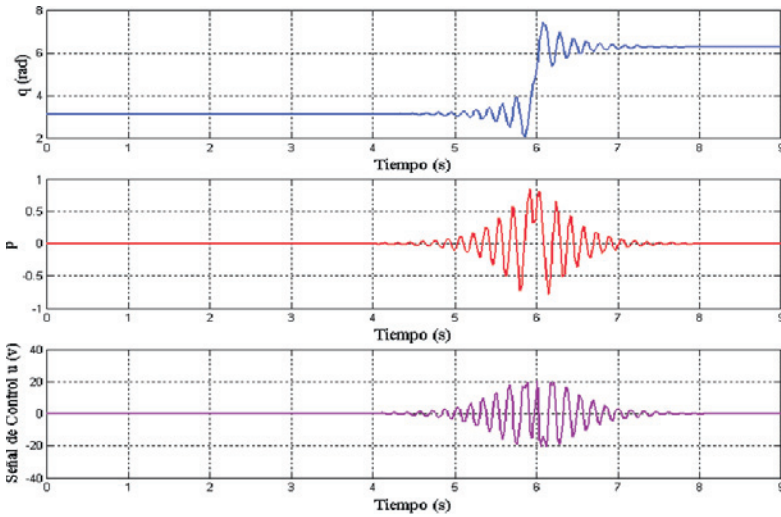


Figura 7. Señales del sistema dinámico y control
(disminución del *chattering*)

Ahora, es necesario que se analice la estabilidad del sistema con base en una función *como de energía* que se considerará como candidata a función de Lyapunov. Es fácil ver que (19)

$$H_d = -\Psi(q, p)p^2 \cos^2 q \quad (19)$$

Como Ψ no tiene signo definido y H_d no es función de Lyapunov, pero se puede modificar de tal forma que lo sea. Considere la función dada en (20) candidata a función de Lyapunov:

$$V = \Psi(q, p) \left(H_d - \frac{1}{4a} - \Delta \right) \quad (20)$$

Hay que notar que esta función no es diferenciable en la curva de conmutación donde $V = 0$, sin embargo, fuera de esta curva se tiene (21):

$$\dot{V} = -\Psi^2(q, p)p^2 \cos^2 q \leq 0 \quad (21)$$

Por lo tanto, V es función de Lyapunov excepto en la curva de nivel cerrada $V = 0$ [8], además el sistema es asintóticamente estable, puesto que V es función de q y p [21].

3. RESULTADOS EXPERIMENTALES

Para lograr el desempeño del controlador diseñado en tiempo real sobre la planta se ha utilizado el ambiente de desarrollo *Microsoft Visual Studio.NET*[®] y la tarjeta de adquisición de datos DAQ PCI-6014 de National Instruments[™]. Después de ejecutar el control sobre el sistema fue necesario sintonizar el controlador modificando los valores de los parámetros a y K , dado que el controlador diseñado se preparó a partir de parámetros físicos iguales a uno.

Al obtener la sintonización se obtuvo un controlador con parámetros $a = 0.505$, $K = 150$ y $\Delta = 0.1$, con los que se consiguieron los resultados

mostrados en la figura 8, donde se puede observar que el Péndulo alcanza la posición deseada en $t = 20.43s$ y el voltaje de control no excede valores de $u = 27$ voltios. Se ve claramente la respuesta del controlador ante disturbios fuertes; el Péndulo abandona el pozo de energía deseado, pero de inmediato el controlador le inyecta la energía necesaria, buscando la superficie de deslizamiento, para estabilizarse de nuevo en la posición deseada cerca a 120s, y el Péndulo la alcanza, luego se le introduce otra perturbación y se estabiliza de nuevo.

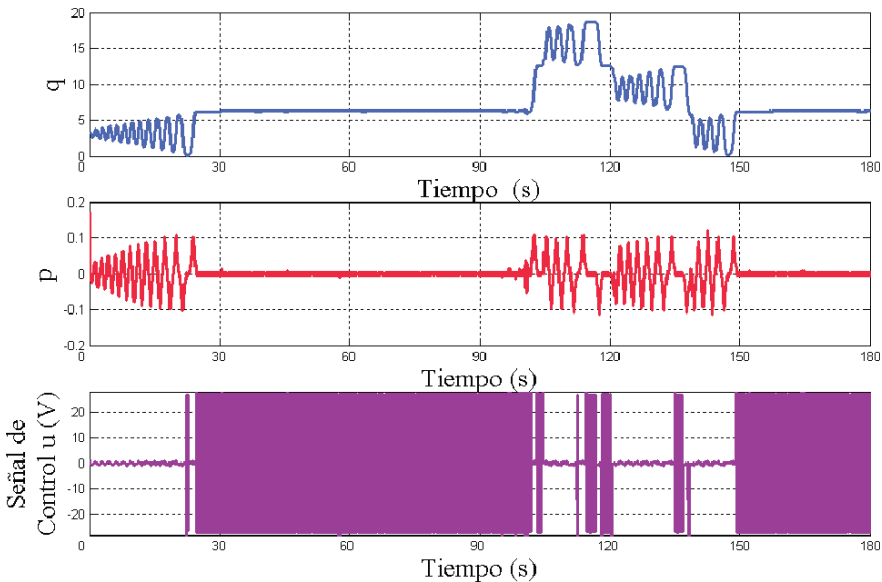


Figura 8. Resultados experimentales para $K = 150$

Luego, se obtuvo un controlador con parámetros $a = 0.505$, $K = 200$ y $\Delta = 0.1$, con los que se consiguieron los resultados mostrados en la figura 9, donde se puede observar que el Péndulo alcanza la posición deseada en $t = 14.57s$ y el voltaje de control no sobrepasa valores de $u = 24$ voltios. Al realizar modificaciones de los parámetros del sistema se pudo observar que la variación del parámetro modifica la cuenca de atracción del sistema y lo convierte en inestable, y la variación del parámetro K aumenta o disminuye el tiempo de establecimiento, como se puede ver en las figuras 8 y 9. Por otra parte, la minimización del *chattering* en las gráficas de la posición q hace que este efecto no sea perceptible.

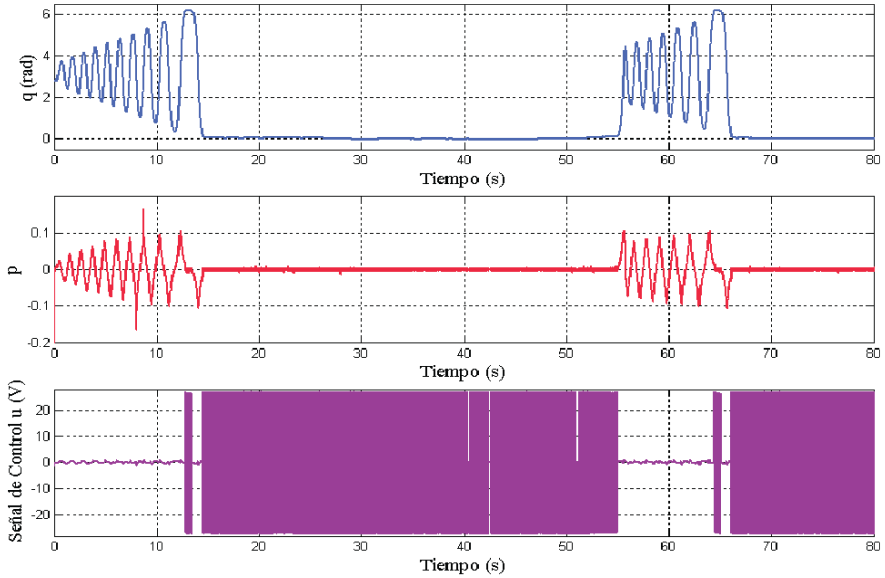


Figura 9. Resultados experimentales para $K = 200$

Es evidente que los datos adquiridos de la señal de control y los que se observan en las simulaciones no están correlacionados; esto se puede explicar recordando que el modelo simulado en Matlab® es un sistema ideal en el que no intervienen fuerzas externas como fricción, tensión mecánica y vibraciones que perturben el Péndulo en la posición deseada. En cambio, el sistema real presenta las perturbaciones antes mencionadas, lo cual obliga al controlador a realizar un esfuerzo de control grande cuando el Péndulo está en la posición objetivo, justificando así que el amortiguamiento de energía sea mucho mayor que el simulado y exigiendo que la constante K tenga un valor más alto. Todo lo anterior demuestra que el controlador diseñado e implementado es tan robusto como se esperaba.

En la figura 10 se presenta el Péndulo de Furuta construido y sobre el cual se aplica esta técnica de control.

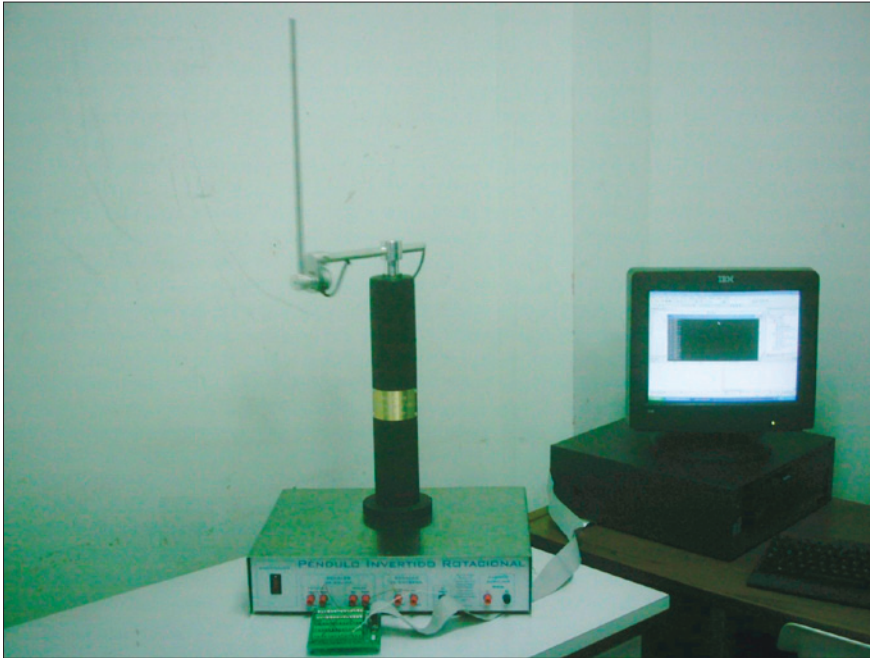


Figura 10. Péndulo controlado con la técnica de modos deslizantes

4. CONCLUSIONES

Se ha analizado la dinámica del Péndulo de Furuta usando el formalismo hamiltoniano; dicho análisis ha entregado información sobre las características no lineales del sistema, tales como dos puntos de equilibrio, uno estable y otro inestable, oscilaciones alrededor del punto de equilibrio estable y los cambios de energía en el sistema. La información obtenida del análisis ha sido la base del diseño del controlador por modos deslizantes, pues se ha usado una función *como de energía* basada en el hamiltoniano del sistema (función de Lyapunov), con la que se obtuvo estabilidad asintótica.

La ley de control se obtuvo imponiendo ciertas condiciones a las ecuaciones de lazo cerrado, y dio como resultado la transformación del punto de equilibrio inestable en uno estable y la modificación del hamiltoniano. El hecho de obtener un sistema en bucle cerrado con estructura hamiltoniana ofrece la oportunidad de resolver el problema de rechazo de perturbaciones. El rendimiento del controlador no lineal es muy satisfactorio, incluso lejos de

la región donde el modelo puede ser linealizado y controlado por técnicas lineales, como se aprecia en las simulaciones (fig. 8 y 9).

El controlador implementado en el sistema dinámico se comportó de acuerdo con los resultados analizados en las simulaciones, ya que se logró resolver el problema de *swing up* y se estabilizó el sistema en la posición de equilibrio inestable usando una lógica de conmutación mediante los modos deslizantes (sólo un controlador). Además, al presentarse perturbaciones externas cuya energía no sobrepasa la energía necesaria para que el Péndulo vaya a un pozo de energía indeseado, el sistema de control minimiza la energía de estas perturbaciones restituyendo la estabilidad en la posición objetivo; en el caso de perturbaciones externas que lleven el sistema fuera de la cuenca de atracción, el controlador de inmediato activa la inyección de energía sobre el Péndulo, con el propósito de que éste encuentre la superficie de deslizamiento y así pueda regresar a la posición deseada. Esto demuestra que el controlador tiene la capacidad de realizar transiciones en los niveles de energía del sistema en todo el espacio de fase, con el objetivo de estabilizar el Péndulo sobre una superficie de energía deseada.

Referencias

- [1] F. Gómez-Estern, "Control de sistemas no lineales basado en la estructura hamiltoniana," tesis doctoral, Universidad de Sevilla (España), 2002.
- [2] A. Bloch y J. Marsden, *The Equivalence of Controlled Lagrangian and Controlled Hamiltonian Systems*. Pasadena:EDP Sciences, 1999.
- [3] V. Utkin, *Sliding Modes and their Applications in Variable Structure Systems*. Moscú: MIR Publishers, 1978.
- [4] J. Hung, "Variable Structure Control: A Survey," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 4, N° 1, pp. 2-22, 1993.
- [5] V. Utkin, "A Control Engineer's Guide to Sliding Modes Control," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 7, N° 1, pp. 328-341, 1999.
- [6] K. Furuta y K. Åström, "Swinging Up a Pendulum by Energy Control", *IFAC 13th World Congress*, San Francisco (California), 1996.
- [7] J. Aracil y F. Gordillo, "El péndulo invertido: un desafío para el control no lineal," *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, vol. 2, N° 2, 2005.
- [8] F. Gordillo y J. Acosta, "A Control Strategy for the Cart-Pendulum System", in *Proceedings of the sixth Controlol*, Portugal, 2004, pp. 214 - 1215.
- [9] J. Acosta y J. Aracil, "Estudio comparativo de diferentes estrategias de control para el Péndulo de Furuta", *XXI Jornadas de Automática*, N° 1, Sevilla (España), 2004.

- [10] J. Aracil y F. Gordillo, "Comparative Study of Nonlinear Strategies for the Furuta Pendulum", *Proceedings of the International Conference Measurement and Control*, Pittsburgh (Pennsylvania), IFAC, 2001, pp. 18 -23.
- [11] J. Marsden y T. Ratiui, *Introduction to Mechanics and Symmetry*. New York: Springer-Verlag, 1994.
- [12] H. Berendsen, *Hierarchical Modelling: From Quantum Mechanics to Fluid Dynamics*, Netherlands: University of Groningen, 2000.
- [13] G. Sussman, *Structure and Interpretation of Classical Mechanics*, Cambridge: The MIT Press, 2001.
- [14] G. Teschl, *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems*. Viena: Universidad de Viena, 2004. [e-book] Available: <http://www.mat.univie.ac.at/~gerald/ftp/book-ode/ode.pdf>
- [15] D. Chang y N. Leonard, "Controlled Lagrangian and the Stabilization of Mechanical Systems II: Potential Shaping," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 45, N° 12, 2001.
- [16] N. Leonard y J. Marsden, "Potential Shaping and the Method of Controlled Lagrangians", *Conference on Decision y Control*, Phoenix, 1999.
- [17] A. Bloch y D. Chang, "Potential and Kinetic Shaping for Control of Underactuated Mechanical Systems", in *Proceeding Amer. Control Conf.*, Boston, 2000, pp. 3913 - 3917.
- [18] M. Spong, "Passivity Based Control of the Compass Gait Biped". Phoenix: University of Illinois, 2000.
- [19] A. Van der Schaft, *Theory of Port-Hamiltonian Systems*, Department os Applied Mathematics, Netherlands: University of Twente, 2005.
- [20] A. Cannas, *Lectures on Symplectic Geometry*. Berkeley: University of Berkeley, 2000.
- [21] H. Khalil, *Nonlinear Systems*, 2nd ed. New Jersey: Prentice Hall, 1996.