Cavilaciones sobre el interés simple

Thinking about the simple interest

Leonor Cabeza de Vergara

Roberto Angulo. *Ámame*. Acuarela sobre papel (detalle).

LEONOR CABEZA DE VERGARA
MATEMÁTICO; ESPECIALISTA EN ADMINISTRACIÓN FINANCIERA Y MAGÍSTER EN ADMINISTRACIÓN DE EMPRESAS
PROFESORA DEL TC. DEPARTAMENTO DE ADMINISTRACIÓN DE EMPRESAS UNIVERSIDAD DEL NORTE.
lcabeza@uninorte.edu.co

zona próxima

Revista del Instituto de Estudios en Educación Universidad del Norte

nº 12 enero-junio, 2010
ISSN 1657-2416

RESUMEN

Como producto de las reflexiones sobre la conceptualización del interés simple surgieron dos preguntas a nivel de clase: ¿Por qué, bajo la modalidad del interés simple, el presente de cada una de las cuotas constantes vencidas no es igual al presente de la anualidad vencida?, y ¿Qué porción de una cuota vencida bajo el interés simple se asigna a interés y a capital? Para trabajar estos interrogantes se partió de un caso práctico y con el soporte conceptual de interés simple, series, serie armónica, propiedades de las desigualdades de las series y el concepto de integral se comprobó y demostró la diferencia entre el presente de una anualidad vencida y la suma del presente de cada cuota vencida. Seguidamente se determinó una ecuación que permitió discriminar, en cada cuota vencida, bajo la modalidad de interés simple, que porción se asigna al pago de intereses y a capital respectivamente. Este trabajo permite enriquecer y profundizar la producción de la línea "Contextualización de las Matemáticas Financieras" adscrito al grupo Innovar del Caribe.

palabras clave: Interés, interés simple, anualidades, presente, valor del dinero en el tiempo.

ABSTRACT

As a product of discussions on the use of simple interest and its conceptualizing two questions emerged in the class: Why, under the form of simple interest, present, each of the shares fixed constants is not equal to the present of the annuity due? and What, portion of a fee simple interest expired under allocated to interest and capital? To work these questions we started with a case and with the conceptual support of simple interest, series, harmonic series, properties of inequalities of the series and the integral concept the difference between the present of an annuity due and the amount of each installment was verified and proven. Following an equation was determined that could discriminate each share expired, the portion allocated to interest and capital terms. This work enriches and increases group production of "Contextualization of Financial Mathematics" attached to the Caribbean Innovate Group.

key words: interest, simple, payment, present

fecha de recepción: 30 de noviembre de 2009
fecha de aceptación: 31 de marzo de 2010

INTRODUCCIÓN

Como docente de Matemáticas Financieras he presenciado periódicamente la generación de dos inquietudes cuando se trabaja el concepto del interés simple; las mismas hacen referencia al presente de una anualidad vencida: ¿Por qué la suma de los presentes de las n cuotas pactadas para liquidar un préstamo no es igual al presente de una anualidad vencida bajo la modalidad del interés simple? La otra inquietud es: ¿Cómo se distribuye la cuota pactada, ¿Qué porción de esta cuota se asigna para el pago de intereses y cuál es el abono al capital? Este trabajo explica y soluciona estos dos interrogantes.

Cuando se trabaja el concepto de interés compuesto estas inquietudes no se presentan; bajo esta modalidad los intereses se liquidan sobre saldo, pero en el interés simple esto no ocurre, es decir, no existe capitalización, los intereses se liquidan sólo sobre capital. Por esto a los estudiantes les es difícil entender cómo se descompone una cuota bajo la modalidad del interés simple y por qué en el interés simple no puede traer a presente las n cuotas fijas constantes y decir que este es el préstamo.

A lo largo de los años se ha explicado esto, apoyándose en la definición de interés simple e interés compuesto, pero se ha querido demostrar estas dos afirmaciones. En la modalidad de interés compuesto esto es muy fácil de demostrar y observar, pero bajo el concepto del interés simple, que no permite la capitalización, no es tan sencillo dar respuesta a esto.

Para facilitar la comprensión se partió de un caso particular donde se mostró cada uno de los interrogantes y se procedió luego a generalizar estos resultados apoyándose en conceptos básicos como: interés simple, interés compuesto, la diferencia que existe entre los dos, el concepto de serie, progresión aritmética, (concepto que permitió la construcción de la conceptualización del interés simple), el concepto de serie armónica y las propiedades de las desigualdades de las series. Para lograr probar cada una de las dos afirmaciones se buscó apoyo en la demostración matemática y en los conceptos anteriormente citados. Este es un trabajo simple que busca mostrar a los curiosos de estos temas cómo se pueden sustentar estas afirmaciones.

Como producto de este trabajo se demostró que en el interés simple cuando se habla de anualidades o cuota constante vencida, al no poder liquidar los intereses sobre saldo sino, sólo sobre capital, no podemos traer a presente cada cuota, dado que se estaría deduciendo unos intereses que no son los correctos, lo cual nos lleva a construir un presente menor al valor original. Las equivalencias que se han construido bajo el interés simple, asumieron el uso de cada cuota hasta el periodo n, y considerando así unos intereses sobre los intereses que están dentro de cada cuota; intereses que se descuentan al traer este futuro a presente.

En el caso de la descomposición de la cuota en capital e intereses, se generó una ecuación que permite la distribución de los intereses totales a liquidar sobre el capital, en cada cuota a cancelar.

MARCO CONCEPTUAL

Es importante tener presente que el dinero tiene diferente valor a lo largo del tiempo; es decir, el dinero de hoy tendrá un menor valor dentro de ***n*** años, se asume que en parte esto se debe a la inflación que se refleja en una pérdida de poder adquisitivo pero también hay que tener presente que las personas por lo general prefieren consumir hoy que en el futuro. Si hoy se invierte, se espera que en un futuro este dinero genere más dinero; es decir si una persona entrega su dinero al cabo del tiempo espera recibir algo más; que se le reconozca lo que dejó de adquirir; hoy esto es lo que se conoce como "Intereses", es decir, el costo por el uso del dinero; pero este costo depende del precio que se pacta por cada unidad monetaria, el peso, que se utilice en un intervalo de tiempo y es llamado tasa de interés.

Cuando se habla de interés existen tres tipos de interés; interés simple, interés compuesto e interés continuo. En el ***interés simple*** se asume que los intereses que se pagan o reciben en un período determinado se liquidan solo sobre capital, es decir; los intereses acumulados ganados en períodos anteriores no ganan intereses, período tras periodo los intereses recibidos o pagados son fijos o son constantes. Por ejemplo, si invierte P ($ 1. 000.000) hoy y se acuerda pagar 2% mes, interés simple, cada mes se reciben $ 20.0000. Si esta inversión la mantiene por cuatro meses, al cabo de los cuatro meses se tiene un saldo $1.080.000; en el segundo mes no se reconoció el uso de los $20.000 que se causaron en el primer mes, en el tercer mes tampoco se reconoció un solo peso por el uso de los $40.000 de intereses ganados y acumulados y así sucesivamente cada mes, los intereses se liquidaron mensualmente solo sobre la inversión $1.000.000.

Cuando se pacta ***interés compuesto***, se reconocen los intereses sobre saldo, es decir; los intereses devengados en periodos anteriores reciben intereses, al igual que el capital, es decir; se capitaliza. Siguiendo con el ejemplo anterior pero pactando un interés compuesto para esta inversión, se acepta pagar intereses sobre saldo, es decir sobre el $1.000.000 invertido y sobre los intereses que se ganan en cada mes.

Al terminar el primer mes se tiene un saldo de $1.020.000, ese saldo se trabaja en el segundo mes y por haber pactado interés compuesto se debe pagar el uso de todo el dinero, es decir $ 1.020.000*.02 = $20.400, total saldo $1.040.400. Todo este dinero se trabaja en el tercer mes y se deben liquidar los intereses sobre saldo, $ 1040.000*0.02 =$20.808; el nuevo saldo al terminar el tercer mes es $1.061 208; luego al iniciar el cuarto mes se tiene $ 1.061.208 y el saldo al terminar el cuarto mes $1.061.208+ ($1.061208*0.02) = 1.082.432, 16. Se puede concluir que bajo la modalidad del interés compuesto se capitalizó. En cada periodo se reconoció el uso del capital más los intereses.

Los tipos de interés analizados anteriormente, interés simple y compuesto, consideran una tasa que se comporta discretamente, es decir, el período de capitalización se asume en intervalos de tiempo fijos, constantes: años, semestres, trimestres y meses.

En el ***interés continuo,*** el período de capitalización es infinitesimal, por tanto el período de capitalización puede tomar cualquier valor en un intervalo de tiempo; éste puede ser anual, semestral, trimestral.

Si se depositan hoy \$P y se mantiene este depósito **n** períodos, bajo una tasa de interés continuo, al cabo de este tiempo debe tener el capital más los intereses devengados.

En el tiempo t_0 el depósito original se ha transformado en un capital $C(t_o)$, en el instante $(t_0+\Delta_t)$, el capital asciende a $C(t_0+\Delta_t)$; el incremento del capital de t_0 a $(t_0+\Delta_t)$ es producto de los intereses causados en ese intervalo de tiempo, la razón de cambio del capital en el intervalo $[t_0;(t_0+\Delta_t)]$ se expresa por:

$\dfrac{C(t_0+\Delta_t) - C(t_0)}{\Delta_t}$; dado que el período de capitalización es infinitesimal, se asume que $\Delta t \longrightarrow 0$ y se transforma la razón anterior en:

$\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{C(t_0+\Delta_t) - C(t_0)}{\Delta_t} = \dfrac{dC}{dt}$; como la derivada del capital con respecto al tiempo,

Pero esto corresponde al interés causado en el período. C. r.

Luego $\dfrac{dC}{dt} =$ C. r; diferenciando esta ecuación se obtiene: $\dfrac{dC}{C} = r\,dt$

Como el objetivo es calcular a qué equivale el depósito inicial P al cabo de n período infinitesimales, se debe procede a integrar:

$$\int_P^F \frac{dC}{C} = \int_0^n r\cdot dt \qquad \Big[\mathrm{Ln}\ C\Big]_P^F = \Big[r\cdot t\Big]_0^n = \mathrm{Ln}\ (F) - \mathrm{Ln}\ P = n.\ r;$$

esto se puede expresar como: Ln (F/P) = n.r; apoyándose en la definición de logaritmos, esta ecuación es equivalente a: $e^{nr} = (F/P)$; despejando, $F = P.\ e^{nr}$, futuro de un valor presente bajo el interés continuo. $\mathbf{F = P\ e^{nr}}$. (Cabeza & Castrillón, 2008, p. 106)

En el desarrollo de este trabajo se trabaja con las siguientes equivalencias tomadas de (Cabeza & Castrillón, 2008, pp. 8-9; 21)

F = P (1+n.i) Futuro de un valor presente, Interés simple. Equivalencia 1

P = F/ (1+n.i); Presente de una cantidad futura, interés simple. Equivalencia 2.

$$P = \frac{n.\ A\ .\ [2 + i.\ (n-1)]}{2.\ (1 + i\ .\ n)}$$ **Presente de una anualidad vendida interés simple**

Equivalencia 3

Para la demostración de los interrogantes de este trabajo es importante tener claro que serie es la suma de los términos de una sucesión, puede ser finita o infinita. Una serie con términos a_n se representa como $\sum_{i=1}^{N} a_i$ donde N es el término final de la serie. Las ***series infinitas*** son aquellas donde i toma todos los valores de los números naturales, es decir, i=1,2, 3,4…………………∞

Las series pueden ser ***convergente****s* o ***divergentes***. En Calculo, una serie es ***diverge*** si $\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} a_i$ no existe o si tiende a infinito; ***converge*** si $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i = L$ Donde $L \in R$.

Otro concepto es el de serie parcial, entendido como la suma de ***n*** términos de una sucesión $\sum_{i=1}^{n} a_i$

Dentro de las series matemáticas existe una muy importante, la serie o progresión aritmética, que soporta la conceptualización del interés simple. Una progresión aritmética es una sucesión en la que existe un número ***d*** llamado diferencia común, con la propiedad de que $(a_{n+1} - a_n) = d$ para todo n. (Protter & Morey, 1986, p. 111) esta progresión cumple que la suma de n términos de una progresión aritmética es igual a:

$$S_n = \frac{a.n\,[\,2 + (n-1)\,d]}{2} \quad \text{Ecuación 1}$$

S_n = Suma de los n términos de una progresión aritmética
a= Primer término de la progresión
d= Diferencia constante entre cada termino de la progresión y el anterior
n= Número de términos de la progresión.

Otra serie bastante útil, es la serie armónica $\sum_{K=1}^{\infty} (1/K)$,

La serie armónica es divergente (Taylor & Wade, 2008, p. 761)
Pero para el caso de sumas parciales la función
f(t)= Ln ***t*** está dada por el área bajo la curva
f=(1/t) entre [1; t] es decir:

$\operatorname{Ln} t = \int_1^t (1/x)\,dx$ que es aproximadamente igual a: $x = \sum_{n=1}^{t} (1/X)$.

Dado que la integral es el área bajo la curva (1/X) y se conoce que x_n es creciente, ya que x_{n+1} es igual a x_n mas el área entre $x = n$ y $x = n + 1$, y la sucesión (1/x) esta acotada por 1, puesto que los valores de x_n se pueden colocar en un cuadrado de área 1. En conclusión X_n, la serie parcial (1/x), tiene límite. Además, de acuerdo al segundo teorema fundamental del cálculo (Purcell, Rigdon & Varberg, 2007, p. 243) dice que si una función f(x) es continua en un intervalo [a;b] y hay una anti derivada F(x) de f(x) entonces :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Dentro de este repaso de conceptos es importante recordar ciertas propiedades de las series y para esto el carácter de una serie no cambia si se multiplica por un numero K≠ 0. En este caso:

$$\sum_{n=1}^{\infty} k a_n \text{ entonces } k \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$ son series convergentes con límites S_1 y S_2, entonces

- Si: $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = S_1 + S_2$
- Comparación por diferencia

Dadas dos series $\sum a_n$ y $\sum b_n$ tales que $a_n \leq b_n$ ***para todo n*** ≥ 0:
a) Si $\sum a_n$ diverge, entonces $\sum b_n$ diverge.
b) Si $\sum b_n$ converge, entonces $\sum a_n$ converge.
Con base en estos conceptos se tratara de soportar la siguiente disertación.

Objetivos

- Explicar bajo la modalidad del interés simple, porque el presente de cada una de las cuotas fijas constantes vencidas no es igual al presente de una anualidad vencida.
- Determinar bajo la modalidad del interés Simple que porción de una cuota fija vencida se asigna a intereses y a capital en cada período.

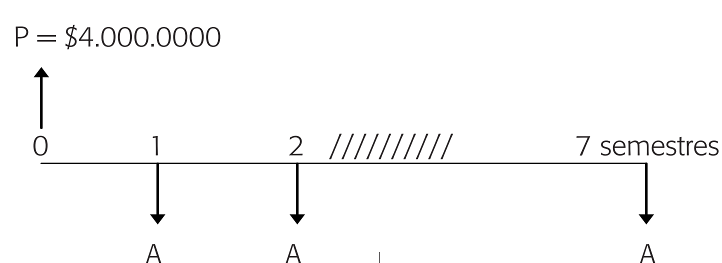
Desarrollo

Para dar respuesta a estos dos interrogantes, se ha propuesto un caso particular, para luego si, generalizar y poder encontrar las equivalencias respectivas.

Caso

Se realiza un préstamo de $4.000.000 y se pacta cancelarlo en siete cuotas iguales, a una tasa de interés de 6% semestral bajo la modalidad del interés simple. ***Se desea calcular el valor de la cuota y construir una matriz de pago que muestre cómo se distribuye la cuota entre intereses y abonos a capital y compare el presente de cada cuota con el presente de una anualidad vencida, interés simple.***

Solución



I = 6% semestral
A = ?

- Despejando A de la **equivalencia 3**, presente de una anualidad vencida se obtiene:

$$A = \frac{2 \cdot P \cdot [1 + n \cdot i]}{n [2 + (n-1) \cdot i]}$$

- Reemplazando en la fórmula se tiene:

$$A = \frac{2 \cdot \$4.000.00 [1+ 7 \cdot 0.06]}{7 [2 + (7-1) \cdot 0.06]} = \$ 687 651,33$$

- ***La cuota que se debe cancelar semestralmente es de $*** 687. 651,33

Como uno de los objetivos es verificar que el presente de cada una de las cuotas constantes bajo la modalidad del interés simple no es igual al préstamo, para comprobar ésto se utilizó la **equivalencia 2**; presente de una cantidad futura, presentada en marco conceptual (página 164) que permite traer una cantidad de dinero n períodos atrás a una tasa i y se comparó con el resultado obtenido por la **equivalencia 3**; futuro de una cantidad presente, que permite buscar el valor de $P, n periodos después a una tasa i, y el resultado de trae a pesos de hoy estos futuros con la **equivalencia 2**, esto se muestra en la tabla siguiente.

Tabla. 1
Comparación del presente de una anualidad vencida vs el presente de cada cuota interés simple

(1) N	(2) A	(3) Presente de cada cuota	(4) Futuro de cuota	(5) Presente de cada cuota (4)
0				
1	$ 687.651,33	$648.728	$ 935.206	$658.596
2	$ 687.651,33	$613.974	$ 893.947	$629.540
3	$ 687.651,33	$582.755	$ 852.688	$600.484
4	$ 687.651,33	$554.558	$ 811.429	$571.429
5	$ 687.651,33	$528.963	$770.169	$ 542.373
6	$ 687.651,33	$505.626	$728.910	$513.317
7	$ 687.651,33	$484.262	$687.651	$ 484.262
Total	$ 4.813.559,32	$ 3.918.865	$ 5.680.000	$ 4.000.000

Fuente. Elaboración propia.

Si se observa la columna (3), se tomó cada cuota y se trajo a pesos de hoy, con la equivalencia (3) presente de un valor futuro; ejemplo:
Cuota 3: P = $687.651, 33/ (1 + 3• 0, 06) = $ 582.755.

La suma de estas cuotas es diferente a $4.000 .000; se obtuvo un valor de $3.918.865; En la columna (4) se tomó cada cuota A, columna (2) y se llevó a futuro utilizando la equivalencia (1), futuro de un valor presente; F= $687.651,33•(1+ 3•0,06) = $852.688; sumando todos los futuros se obtuvo un valor de $5 680 000, pero si se trae este valor a pesos de momento cero con la equivalencia (2), presente de un valor futuro, es igual al |préstamo; P= $5.680 000/ (1+ 7*0.06) = $ 4 000 000, ahora si se suman las filas de la columna (5) que representan el presente de cada cuota ubicada en el semestre siete, se obtiene una sumatoria igual a $ 4. 000.000.

Generalizando el anterior ejemplo, se puede concluir:

$$P = A\bullet \sum_{J=1}^{n} \frac{(1 + (J-1)^{*} i)}{(1+ n^{*}i)} = \frac{n.\ A\ .\ [2 + i.\ (n-1)]}{2.(1 + i\ .\ n)} \neq \sum_{J=1}^{n} \frac{A}{(1+j^{*}i)}$$

Utilizando el concepto de serie aritmética se puede demostrar la igualdad de los dos primeros términos.

$$P = A \cdot \sum_{J=1}^{n} \frac{(1 + (J-1) \cdot i)}{(1+ n \cdot i)} = \frac{A}{(1+ n \cdot i)} \cdot [\,1+ (1+i)+(1+2i)+(1+3i) \ldots\ldots + (1+(n-1)\, i)]$$

El factor $[\,(1+i)+(1+2i)+(1+3i) \ldots\ldots + (1+(n-1)\, i)] = [n + i + 2i + 3i + \ldots\ldots + (n-1)i]$

los sumandos desde i hasta (n-1)•i es la suma de los términos de una sucesión aritmética y utilizando la propiedad conmutativa y sacando factor común i, se pretende calcular esta suma $S_{n-1;}$ suma que se puede expresar de mayor a menor o de mayor a menor, esto por la conmutatividad de los números reales:

- $S_{n-1}. = \;[1 \;+\; 2 \;+\; 3 \;+\; 4 \;+ \ldots\ldots + (n-1)]$
- $S_{n-1} = \;[(n-1) + (n-2) + (n-3) + (n-4) + \ldots\ldots + \;1]$

$2S_{n-1} = \;[\; n \;+\; n \;+\; n \;+\; n \;+ \ldots\ldots\ldots + \;n]$

Luego, se está sumando (n-1) veces la misma cantidad ***n***, por tanto:
$2S_{n-1} = (n-1) \cdot n$ entonces $\mathbf{S_{n-1} = (n-1) \cdot n / 2.}$

Reemplazando:

$$P = A \cdot \sum_{J=1}^{n} \frac{(1 + (J-1) \cdot i)}{(1+ n^* i)} = \frac{A^*}{(1+ n^* i)}\left[\, n+ \frac{i(n-1)n}{2}\,\right] = A^* \, n \frac{[\,2+ (n-1)\, i]}{2(1+ni)}$$ **Equivalencia 4**

Tomando los datos reales de la tabla #1 se puede concluir que se reconoció el uso de cada una de las siete cuotas de $687.651,33 hasta el final del semestre siete, hay que recordar que en cada una de estas cuotas está incluido una porción para liquidar intereses y si se revisa la definición de interés simple, se esta reconociendo intereses sobre estos intereses. El criterio que se utilizó fue: dado que la cuota no se liquida en el momento establecido, se reconoció el costo del uso de este dinero bajo la modalidad de interés simple; esto es igual a que el préstamo de $4.000,000 lo liquidara con un solo pago en el semestre siete, lo cual se puede calcular por:

$$F = \frac{n \cdot A \cdot [2 + i \cdot (n-1)]}{2} = \$\, 5.680.000; \text{ como } A\,; \quad \sum_{k=1}^{n} A_k = nA = \$ \quad 4.813.559{,}32$$

Luego:

$$\frac{n \cdot A \cdot [2 + i \cdot (n-1)]}{2} - nA =$$ Intereses reconocidos por las cuotas que no se liquidaron en su momento (período n) y se liquidarán todas en el periodo n

$$nA\frac{[2+ (n-1)i}{2} - 1] = n \cdot A \frac{[\,2+ (n-1) \cdot i - 2]}{2} = \frac{nA\,(n-1)i}{2} = \mathbf{\frac{n(n-1)\,Ai}{2}}$$

Para el caso particular se tiene: \$ 5.680.000 - \$ 4.813.559,32= \$866.440,68 =

$$\frac{n\bullet(n-1)\bullet A\bullet i}{2} = \frac{7\bullet 6\bullet \$\ 687.651,33}{2}\bullet 0.06 = \$866.440,68$$

Los intereses reconocidos por todas las cuotas que se liquidarán en el periodo n:

$$I_f = \frac{n(n-1)\,Ai}{2}$$ **Equivalencia 5.**

I_f= Intereses totales pagados por el préstamo en el periodo n
n= Número de cuotas pactadas
A= La cuota constante pagada cada período.

A•i representa el costo del uso de la cuota en un período y se reconoce este costo por cada uno de los períodos que se utiliza cada cuota, que corresponde a la suma de los (n-1) número naturales; n•(n-1) / 2, Esto es acorde con el concepto de la suma de n términos de una serie aritmética. Siguiendo en este orden en la tabla 1 se puede observar que el presente de cada cuota no es igual al préstamo; columna (3); y se representa en la última parte de la desigualdad donde se trajo a pesos de hoy cada cuota ***A***, se genera la siguiente serie parcial:

$$\sum_{J=1}^{n} \frac{A}{(1+j^*i)}$$

A= es la cuota constante
n= Número de cuotas pactadas
i= La tasa de interés, lo que se reconoce por cada peso que se utiliza en un intervalo de tiempo.
Utilizando las propiedades de las desigualdades:
$0< i < 1$
$0< j\bullet i \leq j$
$1<(1+ j\bullet i) \leq (1+j)$
Por propiedad de las desigualdades se puede concluir:
$1/(1+j\bullet i) < 1$
$1/(1+j) < 1$
$[1/(1+j)] < [1/(1+j\bullet i)]$
Por tanto: $0< [1/(1+j)] < [1/(1+j\bullet i)] < 1$
Como: $0< j \leq n$, entonces $0< (j+1) \leq (n+1)$; por tanto $[1/(1+n)] \leq [1/(1+j)]$.
Luego: $[1/(1+n)] \leq [1/(1+j)] < [1/(1+j\bullet i)] < 1$

$$\frac{n}{(1+n)} \leq \sum_{J=1}^{n} \frac{1}{(1+j)} < \sum_{J=1}^{n} \frac{1}{(1+j\bullet i)} < n \qquad \textbf{Inecuación 1}$$

Reemplazando en la inecuación 1; n por 7 se obtiene:

$$0.875 = \frac{7}{(1+7)} \leq \sum_{J=1}^{7} \frac{1}{(1+j)} < \sum_{J=1}^{7} \frac{1}{(1+j\bullet i)} < 7$$

Multiplicando la inecuación 1, por una cantidad mayor que cero la desigualdad se mantiene, entonces si A= $687.651,33 se tiene:

$$\$601\ 694,91 \leq \sum_{J=1}^{7} \frac{A}{(1+j\bullet i)} < \$4.813.559{,}32$$

Dado que lo que se quiere probar es que la suma de los presentes de cada cuota es diferente a P: $0 < j < n$; $0 < i < 1$ luego; $0 < i\bullet j < n$
$(j-1) < j$ entonces, $(j-1)i < j\bullet i \leq n$, Sumando a ambos lados de la desigualdad la misma cantidad real mayor que cero la desigualdad se mantiene:
$[1+(j-1)\bullet i] < [1+j\bullet i] \leq [1+n]$; **Inecuación 2**
Por propiedades de los números reales y las desigualdades si $a<b$ entonces $(1/b)< a$; si a y b son positivos; tomando los dos primeros términos de la inecuación 2, se tiene:
$[1/(1+j\bullet i)] < [1+(j-1)\bullet i]$ si j toma valores de 1 hasta n se tiene:

$$\sum_{J=1}^{n} \frac{1}{(1+j\bullet i)} < \sum_{J=1}^{n} (1+(J-1)\bullet i)$$

El segundo término es la suma de los n términos de una serie parcial aritmética y que se demostró en la **ecuación 4**; en la página anterior; por tanto:

$$\sum_{J=1}^{n} \frac{1}{(1+j*i)} < \sum_{J=1}^{n} (1+(J-1)*i) = \frac{n[2+(n-1)i]}{2}$$

Multiplicando la **inecuación 1** por A; A>0 :

$$\frac{nA}{(1+n)} \leq \sum_{J=1}^{n} \frac{A}{(1+j)} < \sum_{J=1}^{n} \frac{A}{(1+j*i)} < nA$$

$$P = \frac{An[2+(n-1)i]}{2(1+ni)} < \frac{An[2+(n-1)i]}{2} = F$$

Es de anotar que P está en el tiempo cero (0) y cada cuota que se suma en nA se ubican en un período superior a cero, por tanto;
P < nA <F, luego se espera que:

$$\frac{A}{(1+i)} \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{A}{(1+j\bullet i)} < P < nA < F$$

Apoyándose en el concepto de la serie armónica que dice que una serie parcial de una serie armónica ($\sum 1/X$) definida como el número armónico, crece aproximadamente tan rápido como el logaritmo natural de n, (Porter y Morrey, 1986, p. 574) esto es porque la suma se aproxima a la integral de

$$\int_{1}^{n} (1/x)\, dx = Ln(n)$$

Para el caso X = 1+ j•i; dj=dx/i; el límite superior es igual a (1 + ni) y el límite inferior de la integral es (1 +i) y por el segundo teorema fundamental del cálculo esto es:

$$\int_{1}^{n} (1/(1+ j\bullet i))\, dj = (1/i) \int_{(1+i)}^{(1+ni)} (1/x)\, dx = Ln[(1+n\bullet i)/ (1+i)] / i$$

$$\sum_{J=1}^{n} \frac{A}{(1+j*i)} \quad \textbf{se aproxima} \sim \frac{A[Ln((1+n\bullet i)/(1+i))]}{i} \leq P$$

Como el dinero tiene diferente valor en el tiempo, las n cuotas ubicadas en el período cero tienen un valor menor a la cuota y por ende la suma de las n cuotas, n períodos atrás, debe ser como máximo el valor de contado del bien.

Tomando los datos del caso:

$$\sum_{J=1}^{n} \frac{A}{(1+j*i)} \sim \frac{A[Ln((1+ni)/(1+i)]}{0{,}06} = \frac{687\ 651,33[\ Ln(1+0{,}06*7)/(1{,}06)]}{0{,}06} = 3\ 351\ 016{,}20 < P$$

Con esto se demuestra matemáticamente que el presente de cada cuota no es igual al préstamo, lo cual se explica porque en el interés simple no se pagan los intereses sobre el saldo, al traer cada cuota a presente se estaría descontando un interés que no se liquida sobre la porción del capital que trabajo en el período sino sobre todo el capital, que luego se distribuye en las cuotas, esto se demostrará en los siguientes párrafos.

El segundo objetivo es encontrar una equivalencia matemática que permita distribuir la cuota del interés simple en capital e intereses, para esto se seguirá con el mismo caso. Como se planteó en los párrafos anteriores, para calcular el presente de cada ***cuota j*** se considera el uso de cada cuota en los (n – j) períodos, luego se trae esta cuota a valor presente, lo cual permite descontar los intereses reconocidos del período j al período n y se determina el valor de la cuota en el momento cero, esto permite calcular la diferencia entre la cuota (A) y el presente de la cuota en cada período, lo que corresponde a los intereses que se están liquidando dentro de cada cuota, como se observa en la siguiente tabla.

Tabla. 2
Intereses liquidados por cuota

N	A (1)	PRESENTE	FUTURO (I)	PRESENTE (II)	A – PRESENTE (1) – (II) INTERESES LIQUIDADOS EN CADA CUOTA
-					
1	$ 687.651,33	A*{1+(N-1)i}/(1+ni)	$ 935.205,81	$658.595,64	$ 29.055,69
2	$ 687.651,33	A*{1+(N-2)i}/(1+ni)	$ 893.946,73	$ 629.539,95	$ 58.111,38
3	$687.651,33	A*{1+(N-3)i}/(1+ni)	$ 852.687,65	$600.484,26	$ 87.167,07
4	$ 687.651,33	A*{1+(N-4)i}/(1+ni)	$ 811.428,57	$ 571.428,57	$ 116.222,76
5	$ 687.651,33	A*{1+(N-5)i}/(1+ni)	$ 770.169,49	$ 542.372,88	$ 145.278,45
6	$ 687.651,33	A*{1+(N-6)i}/(1+ni)	$ 728.910,41	$ 513.317,19	$ 174.334,14
7	$687.651,33	A*{1+(N-7)i}/(1+ni)	$ 687.651,33	$ 484.261,50	$ 203.389,83
Total	$4.813.559,32	-		$ 4.000.000,00	$ 813.559,32

Fuente. Elaboración propia.

Generalizando este caso para cualquier número de cuotas(n), tasa (i) y cuota (A) se obtiene

Tabla. 3
Intereses liquidados para n cuotas

J	A	FUTURO (a)	PRESENTE (b)	A – (b) =(C)	(C) INTERESES LIQUIDADOS EN CADA CUOTA
-					
1	A	A*{1+(n-1)i}	A*{1+(n-1)i} /(1+ni)	A-A*{1+(n-1)i}/(1+ni)	Ai/ (1+ni)
2	A	A*{1+(n-2)i}	A*{1+(n-2)i} /(1+ni)	A- A*{1+(n-2)i}/(1+ni)	2Ai/(1+ni)
3	A	A*{1+(n-3)i}	A*{1+(n-3)i} /(1+ni)	A- A*{1+(n-3)i}/(1+ni)	3Ai/(1+ni)
4	A	A*{1+(n-4)i}	A*{1+(n-4)i} /(1+ni)	A-A*{1+(n-4)i}/(1+ni)	4Ai/(1+ni)
J	A	A*{1+(n-J)i}	A*{1+(n-J)i} /(1+ni)	A- A*{1+(n-J)i}/(1+ni)	jAi/(1+ni)
.	A	A*{1+(n-(n-1)i}	A*{1+(n-(n-1)i}/(1+ni)	A- A*{1+ i}/(1+ni)	(n-1)Ai/(1+ni)
n	A	A*{1+(n-n)i}	A*{1+(n-n)i}/(1+ni)	A- A*{1+(n-n)i}/(1+ni)	nAi/(1+ni)
Total	nA				$\frac{Ai}{(1+ni)} \sum_{J=1}^{n} J$

Fuente. Elaboración propia.

De acuerdo a lo desarrollado en la tabla, cuota por cuota se observa que los intereses liquidados en cada cuota son iguales a:

jAi/ (1+ni), donde J = 1, 2, 3, 4………., n. Equivalencia 6

Además la suma de los intereses que se reconocen en cada cuota es igual a la diferencia entre la suma de las n cuotas A, menos el préstamo; **nA – P = I; (I; total de intereses reconocidos).**

Dado que se tiene la suma de los n primeros números naturales, y esto representa una serie aritmética se puede concluir que:

$$\sum_{J=1}^{n} J = n(n+1)/2 \text{ y por ende } \frac{Ai}{(1+ni)} \sum_{J=1}^{n} J = \frac{Ai}{(1+ni)} \bullet \frac{n(n+1)}{2} = I$$

Se busca expresar el interés liquidado en cada cuota en función del interés total que se liquida; despejando **A** de la ecuación anterior se puede concluir: **A = 2I. (1+ni) /n(n+1) i**

Remplazando en la **equivalencia 6**, se tiene:

$$\frac{[2I.\ \cancel{(1+ni)}].}{n(n+1)\ \cancel{i}} \frac{[\ J.\ \cancel{i}]}{\cancel{(1+ni)}} = \frac{2.I.J}{n(n+1)}$$

Bajo la modalidad de interés simple los intereses que se reconocen en cada cuota se calculan bajo la siguiente expresión:

$$Ij = \frac{2.I.J}{n(n+1)} \quad \text{donde } J = 1, 2, 3, 4\ldots\ldots\ldots.., n \quad \textbf{Equivalencia 7}$$

I = Total de intereses reconocidos en los n períodos
J = Número del período a calcular
n= Número total de cuotas pactadas
Ij = Intereses reconocidos en cada cuota j

Comprobando lo encontrado en la siguiente matriz de amortización para el caso que se planteó:

Tabla. 4
Matriz de pago

Semestre	Cuota	Intereses	Abono a capital	Saldo
0				$ 4.000.000,00
1	$ 687.651,33	$ 29.055,69	$ 658.595,64	$ 3.341.404,36
2	$ 687.651,33	$ 58.111,38	$ 629.539,95	$ 2.711.864,41
3	$ 687.651,33	$ 87.167,07	$ 600.484,26	$ 2.111.380,15
4	$ 687.651,33	$ 116.222,76	$ 571.428,57	$ 1.539.951,57
5	$ 687.651,33	$ 145.278,45	$ 542.372,88	$ 997.578,69
6	$ 687.651,33	$ 174.334,14	$ 513.317,19	$ 484.261,50
7	$ 687.651,33	$ 203.389,83	$ 484.261,50	$ -
Totales	$ 4.813.559,32	$ 813.559,32	$ 4.000.000,00	

Fuente. Elaboración propia.

Analizando la tabla se observa que la suma de las siete cuotas es de $ 4.813.559,32 y el capital que se debe cancelar es de $4.000.000; luego la diferencia de $813.559,32 representa los intereses que se deben pagar por el préstamo **(I =P –nA)**. Es importante anotar que dado que se está trabajando con interés simple, los intereses de cada período no se calculan sobre saldo, los intereses totales se distribuyen mediante un factor en cada período mediante la expresión encontrada:

Para calcular los intereses correspondientes al período uno (J=1):
Intereses del período uno es igual a: \$813.559,32•2•1/[7•(7+1)] = \$29.055,69, y así sucesivamente.
El pago de los intereses se puede pactar de dos formas y como es interés simple no hay capitalización; esto sería; cancelar al inicio una mayor cantidad de intereses y menor abono a capital o cancelar al inicio menor cantidad de intereses y mayor abono a capital como se acaba de demostrar. Si se toma la primera opción, la ecuación sería:

Interés del período Ij = I. (n+1 - J). $$\left(\frac{2}{n\bullet(n+1)}\right)$$ **Equivalencia 8**

I = Intereses totales
n = Número de períodos
J = Período de análisis
Ij = Interés del período j

Esto implicaría que la tabla de amortización se invierte.

Para calcular los intereses correspondientes al período uno (1):
Intereses del período uno es igual a: \$813.559,32• [7+1-1] •2/[7• (7+1)] = \$203.389,83.
y así sucesivamente. Esto implica invertir la matriz de pago. Conceptualmente tiene más sentido la primera opción

El abono a capital es la diferencia entre la cuota y los intereses correspondientes a cada período.
Abono a capital = Cuota – Intereses del período

CONCLUSIONES

Como el dinero tiene diferente valor en el tiempo y el uso del dinero tiene costo, bajo este criterio y el concepto de interés simple, se afirma: si se usa dinero se debe pagar por él, si se aplica interés simple, se debe pagar sólo sobre capital, cuando se descompone el pago de un préstamo bajo la modalidad de interés simple en cuotas o anualidades vencidas en **n** periodos, se distribuyen los intereses que se liquidarían en el período n, si en los n períodos no se paga ninguna de las cuotas acordadas, por esto, al construir el presente de una anualidad vencida bajo el interés simple se lleva a futuro cada cuota y luego se descuentan estos intereses, trayendo a presente al momento cero cada cuota, mediante este criterio se descuentan los intereses reconocidos por el uso de cada cuota del periodo **j** al período **n**, es decir, por trabajar la cuota (n- j) períodos, donde j= 1,2,…..n, luego, la diferencia entre este presente y la cuota que se cancela sólo incluye los intereses que se liquidan por cuota.

El total de intereses reconocidos por el uso de cada una de las n cuotas, del período j al periodo n se define por I_f

$$I_f = \frac{n(n-1)\,Ai}{2} \qquad \text{Ecuación 5.}$$

Es cierto que el presente de cada cuota vencida es menor al valor presente de una anualidad vencida es decir, menor al préstamo; esto se debe a que por ser interés simple los intereses no se liquidan sobre saldo y al traer a presente cada cuota se estaría descontando un interés superior al pactado realmente por el préstamo; para este caso es $813.559,32 que corresponde a **(I= nA –P)**; se puede afirmar:

$$\sum_{J=1}^{n} \frac{A}{(1+j^*i)} \text{ se aproxima } \sim \frac{A[Ln((1+ni)}{i}/(1+i))] < P = \frac{An[2+(n-1)i]}{2(1+ni)}$$

I_f= Intereses totales pagados por el préstamo en el periodo n
n= Número de cuotas pactadas
A= La cuota constante pagada cada período.

Si se observa la tabla 1 los datos de la columna (3) son menores que los de la columna (5); es decir se está descontando más intereses de lo acordado, lo cual no es correcto, esto se comprueba en la solución del segundo interrogante.

En cada cuota pactada bajo la modalidad de interés simple se distribuye entre capital e intereses, pero los intereses no se liquidan sobre saldo. La siguiente expresión permite determinar el interés que se liquida en cada cuota j **(I_j)**

$$I_j = \frac{2.I.J}{n(n+1)} \qquad \text{donde } J = 1, 2, 3, 4\ldots\ldots\ldots.., n \qquad \text{Equivalencia 7}$$

I = Total de intereses reconocidos en los n períodos. = nA - P
J = Número del período a calcular
Ij = Intereses liquidados en cada cuota j.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Cabeza, L. & Castrillon, J. (2008). *Matemáticas Financieras*. Barranquilla: Ediciones Uninorte.
Protter, M. & Morrey, Ch. (1986). *Cálculo con geometría analítica*. México: Addison Wesley Iberoamericana S.A.
Purcell, E. J.; Rigdon, S.E. & Varberg, D.E. (2007). *Cálculo*. México: Pearson Education
Taylor, H. & Wade, Th. (2008). *Cálculo diferencial e integral*. México: Limusa.