

Uso de los errores
matemáticos como
dispositivo didáctico
para generar
aprendizaje de
la racionalización
de radicales de
tercer orden

Rafael Escudero

zona próxima

Revista del Instituto
de Estudios Superiores
en Educación
Universidad del Norte

nº 8 diciembre, 2007
ISSN 1657-2416

zona
próxima



Enrique Grau. *Homenaje a Cartagena en sus 450 años*, 1983.
Óleo sobre lienzo, 100 x 70 cm

RAFAEL ESCUDERO

DOCTOR EN EDUCACIÓN, UNIVERSIDAD NEWPORT. COORDINADOR DEL
PROGRAMA DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD DEL NORTE.
(rescuder@uninorte.edu.co)

En este artículo se presentan los resultados de la investigación "Uso de los errores matemáticos para generar aprendizaje de la racionalización de radicales de tercer orden". Para ello se utilizó un diseño cuasi experimental con grupo de control y experimental con aplicación de pretest y posttest. La hipótesis nula o de investigación planteada fue: "No existe diferencia significativa entre el aprendizaje de los estudiantes que utilizan sus errores como fuentes de conocimientos versus el aprendizaje de los estudiantes que no utilizan sus errores como fuentes de conocimiento".

Se encontró que hubo diferencia significativa entre el grupo experimental y el grupo de control con un nivel de significancia del 95%.

Por lo tanto, los estudiantes que utilizaron sus errores como fuentes de conocimientos, aprendieron a racionalizar radicales de tercer orden significativamente mejor que los estudiantes que no utilizaron sus errores como fuente de conocimiento.

PALABRAS CLAVE: Diseño cuasi experimental, grupo experimental, grupo control, didáctica socrática, metacognición, error matemático, pensamiento crítico, racionalización.

RESUMEN

This article shows the results of the research: "Use of mathematical errors to generate learning of the rationalization of third order radicals". In order to achieve this aim a quasi experimental design with control and experimental group with application of the pretest and posttest was used.

The research hypothesis was: "There was not main difference

between the learning of the students who use their errors as beginning of knowledge versus the learning of the students who do not use their errors as beginning of knowledge".

It was found that there was a significant difference between the experimental group and the control group with a confidence level of 95%.

In consequence, the students who used their errors as beginning of knowledge learned better than the students who did not use their errors as beginning of knowledge.

KEY WORDS: Quasi experimental design, experimental group, control group, socratic didactic, met cognition, mathematical error, critic thinking, rationalization.

ABSTRACT

INTRODUCCIÓN

Los errores cometidos por los alumnos en sus procedimientos matemáticos hacen parte de una manera de pensar (no son errores aislados de información o hábitos arbitrarios de pensamiento). Generalmente, son ideas arraigadas en la mayoría de los estudiantes bien como elementos adquiridos de nuestra cultura o como funciones cerebrales procedentes de la selección natural de un momento dado. Una vez adquiridas esas concepciones erróneas son “duras de morir” (Lyndon, 2000).

Rauff (1994, 425) considera que los errores e ideas equivocadas de los alumnos son un conjunto de creencias establecidas por ellos y que el desarrollo de esos errores conduce a soluciones lógicas para los estudiantes. De otra parte, Rico (1995) considera que el error es una posibilidad permanente en la consolidación del conocimiento y puede llegar a formar parte del conocimiento científico que emplean las personas o los colectivos. Al parecer, todos los seres humanos independientemente del desarrollo científico que alcancen, generan preconceptos que los conducen a cometer errores.

Para Bachelard (1998) los entorpecimientos o confusiones que comete un alumno en sus procedimientos hacia la búsqueda de una construcción de conocimiento real son obstáculos epistemológicos que determinan simplemente lo

“incompleto” del conocimiento del alumno, pero no necesariamente ausencia de conocimiento.

Los errores cometidos por los alumnos en sus procedimientos matemáticos y el tratamiento didáctico que los docentes le dan a los errores constituye una de las directrices principales en Educación Matemática hoy, que vale la pena seguir fomentando con el propósito de formular propuestas que ayuden a los alumnos y al docente a encontrar procesos de enseñanza - aprendizaje que los hagan más competentes.

En este contexto está enmarcado este ejercicio investigativo que tuvo como finalidad *indagar por el efecto de los errores matemáticos cometidos por los alumnos en la racionalización de expresiones con radicales de tercer orden como dispositivo didáctico para aprender a racionalizar.*

Se pretendió, con esta investigación, promover el desarrollo de pensamiento crítico de los alumnos, esto es, hacer pensar a los estudiantes sobre sus errores en la racionalización de radicales de tercer orden, como una forma de ayudarlos a que le den sentido a sus concepciones y procedimientos equivocados y adquieran un aprendizaje significativo a través de procesos metacognitivos.

REVISIÓN DE LITERATURA

Para la investigación que se propone:
Uso de los errores matemáticos como dispositivo didáctico para el

aprendizaje de la racionalización con radicales de tercer orden se hizo el siguiente examen de literatura:

- *Conflicto cognitivo y enseñanza del conflicto* (Bell, 1986-1987).
- *Capitalizing on errors as springboards for inquiry* (Borassi, R., 1994). Que se fundamenta en el método socrático para que el alumno a partir de cuestionamientos vaya tomando conciencia de sus errores y dé a luz conocimiento correcto.
- *Enseñanza basada en creencias* (Rauff, 1994). Considera este autor que los errores de los estudiante son creencias muy arraigadas que sólo pueden eliminarse mediante actos metacognitivos.
- *Mediación conceptual* (Lyndon, 1995). Este autor considera que los errores son debidos a que la memoria protege la información inicial de la nueva y una información inicial errónea es "dura de morir".
- *Estrategia Old Way New Way* (Lyndon, 2000). Es una nueva interpretación de lo establecido como de los conceptos, aprendizajes y principios emergentes.

La mayoría de las investigaciones sobre la racionalización de radicales de tercer orden se han dedicado a señalar el error de linealidad que cometen los alumnos:

$$\sqrt[3]{x + y} = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}$$

A señalar el error de dividir por el radicando, por ejemplo: $\sqrt[3]{16} = 8$, o a señalar la operación sin eliminar el operador: $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{4}$

(Gómez & Mesa, 1994, 0-35; Sánchez, Gómez, Polanco & Vanegas, 1998, 40; Mancera, 1998, 50-64).

Aunque las investigaciones referenciadas atribuyen los errores cometidos por los alumnos en el caso de radicales a muchos factores, entre otros, la forma de enseñar el tema, no presentan una propuesta de cómo abordar el problema desde la misma práctica docente a partir del error del estudiante, sino señalando el error.

En este sentido, nuestra propuesta no se queda en el señalamiento del error, sino que enfoca la problemática desde una teoría que se origine en el objeto y sujeto; que permita a partir de allí construir conocimiento verdadero.

El objeto de estudio en este caso son los errores matemáticos cometidos por los alumnos en la racionalización de radicales de tercer orden y el sujeto constituido por los alumnos y el profesor que de manera cooperativa –el último con más experiencia y con una creencia de que el alumno sabe algo– construirán conocimiento correcto a partir de las imperfecciones del primero.

Desde este punto de vista, como las teorías del conocimiento se preguntan sobre el origen y la

naturaleza de las estructuras que el sujeto requiere para describir el objeto del conocimiento al cual se está enfrentando, se cree que una visión epistemológica originada en la interacción objeto-sujeto generará de manera más firme conocimiento, porque se hace a partir de las creencias iniciales de los individuos y promoviendo choques cognitivos entre el conocimiento nuevo y el inicial, en vez de utilizar la manera convencional simplemente de instruir.

METODOLOGÍA

Tipo de estudio

El diseño metodológico que guió esta investigación fue de característica cuasi experimental antes y después con grupo de control no equivalente.

A un grupo se le impartió la enseñanza usando la metodología del error y a otro grupo se le enseñó sin aplicar la metodología del error y los atendió el mismo profesor

investigador.

Hipótesis nula:

No existe diferencia significativa en el aprendizaje de los estudiantes que utilizan sus errores como fuente de conocimientos y los estudiantes que aprenden sin usar sus errores como fuente de conocimientos.

Sujetos

Se utilizó como muestra el grupo de estudiantes del ciclo básico de Ingeniería de la Universidad del Norte que ingresan al primer semestre, integrado por 400 estudiantes aproximadamente, de ambos sexos, en edades comprendidas entre 16 y 18 años y que pertenecen a los programas de Ingeniería Industrial, Electrónica, Mecánica, Civil, de Sistemas y Eléctrica. Cada grupo fue de 35 estudiantes y se seleccionaron de acuerdo con los criterios utilizados por el Comité de Admisiones de la Universidad del Norte.

Modelo seguido

Grupo	Asignación	Pre-Test	Tratamiento	Post-test	Comparación
Experimental	No al Azar	O1	X	O2	$O2 - O1 = D1$
Control	No al Azar	O3		O4	$O4 - O3 = D2$

O1 : Medición pre-test a grupo experimental

O3 : Medición pre-test a grupo de control

X : Aplicación del dispositivo didáctico

D2 : Efecto en grupo control

O2 : Medición post-test a grupo experimental

O4 : Medición post-test a grupo de control

D1 : Efecto en grupo experimental

Procedimientos

Se siguieron los siguientes procedimientos con miras a alcanzar los objetivos específicos de la propuesta:

- Se construyó y aplicó una prueba piloto para indagar por los conocimientos iniciales que los alumnos tenían sobre la racionalización de expresiones con radicales de tercer orden.
- Se le asignó un código a cada estudiante.
- Una vez practicada la prueba se identificaron y jerarquizaron los errores cometidos por los alumnos en la racionalización de radicales de tercer orden en conceptuales y algorítmicos, y de otros tipos que aparecieron.
- Se implementó la enseñanza de la racionalización de radicales de tercer orden usando el error cometido por los alumnos en el grupo experimental y en el grupo de control se utilizó el método convencional.
- Se preparó y aplicó una prueba postest que permitió comparar el aprendizaje de los estudiantes mediante el método del uso de los errores para aprender a racionalizar radicales de tercer orden con el aprendizaje del mismo tema por el método en el cual no se parte del error del estudiante.
- Se aplicó un cuestionario tipo Lickert al grupo experimental para conocer la opinión de los alumnos sobre la metodología del error.

Tabla resumen con estadísticas del Pretest y Postest del grupo experimental y de control

Estadísticos	Pretest Grupo Control	Postest Grupo Control	Pretest Grupo Experimental	Postest Grupo Experimental
\bar{x} (Media)	31.600	36.957	27.545	65.294
\hat{x} (Mediana)	25	20	10	60
σ (Desv. Estd)	22.672	32.674	22.816	28.523
σ^2 (Varianza)	514.04	1067.589	520.568	813.547
Rango	61	90	61	90
X máx	66	100	66	100
X min	5	10	5	10
M (Moda)	10	10	10	100
N (# de Estud)	20	23	33	34

Cálculos realizados con el software STATS™ de McGraw Hill Companies, 1998.

Tabla con diferencias de medias en el Pretest para el grupo experimental y grupo control

G1 (EXPERIMENTAL)	G2 (CONTROL)
$n_1: 33$	$n_2: 20$
$\bar{x}_1: 27.545$	$\bar{x}_2: 31.600$
$\sigma_1: 22.816$	$\sigma_2: 22.672$

Análisis de los resultados

Probabilidad de diferencia significativa
46.80%

Valor $t = 0.629260$

Valor $t_{0.95} = 1.67$

gl (grados de libertad) = $n_1 + n_2 - 2 = 51$

De acuerdo con estos resultados, como el valor de t calculado es menor que el valor de t con 95% de grado de confianza, no se puede rechazar la hipótesis nula. Esto es, en el Pretest no se halló diferencia significativa entre el grupo experimental y el de control ($t < t_{0.95}$) o sea, ($0.629260 < 1.67$)

Tabla con diferencias de medias en el Postest para el grupo experimental y grupo control

G1 (EXPERIMENTAL)	G2 (CONTROL)
$n_1: 34$	$n_2: 23$
$\bar{x}_1: 65.294$	$\bar{x}_2: 36.957$
$\sigma_1: 28.523$	$\sigma_2: 32.694$

Análisis de los resultados

Probabilidad de diferencia significativa
99.90%

Valor $t = 3.46951$

Valor $t_{0.95} = 1.67$

gl (grados de libertad) = $n_1 + n_2 - 2 = 55$

De acuerdo con estos resultados, como el valor de t calculado es mayor que el valor de t con 95% de grado de confianza, se puede rechazar la hipótesis nula. Esto es, en el resultado del Postest se halló diferencia significativa entre el grupo experimental y el de control ($t > t_{0.95}$) o sea, ($3.46951 > 1.67$)

DISCUSIÓN Y RESULTADOS

Se determinó que hubo diferencia significativa entre el grupo experimental y el grupo de control con un nivel de significancia del 95%. Por lo tanto, los estudiantes que utilizaron sus errores como fuentes de conocimientos aprendieron a racionalizar radicales de tercer orden significativamente mejor que los estudiantes que no utilizaron sus errores como fuente de conocimiento.

Podemos decir que la hipótesis nula se pudo rechazar con un grado de confianza del 95%. Esto es, el procedimiento de enseñar a un grupo utilizando los errores cometidos por los alumnos como dispositivo didáctico para que aprendan a racionalizar expresiones con radicales de tercer orden, ofreció en estos alumnos un

aprendizaje significativo con relación al grupo al que se le enseñó el mismo tema sin esta metodología.

Este resultado reafirma el hecho de que mediante procesos metacognitivos como los descritos en la metodología socrática se generan en los alumnos ambientes de confianza que les permite reflexionar sobre sus desempeños para lograr un mejor aprendizaje.

En el desarrollo del estudio se ratificó la bondad del proceso metodológico empleado:

- **Etapla protética:** Motivar al alumno, dejándole que inicialmente racionalizara libremente.
- **Etapla irónica:** Mostrarle al alumno sus errores, esto es, ponerlo en conflicto cognitivo entre lo que el creía era racionalizar radicales de tercer orden y lo que realmente es, pero a partir de la reflexión de sus errores (metacognición).
- **Etapla mayéutica:** Después de convencerse de sus insuficiencias, comenzó el desarrollo de nuevas ideas para racionalizar correctamente (De Zubiría, 1998).

También el proceso estadístico nos permitió responder afirmativamente el planteamiento de la pregunta problema:

¿Los errores matemáticos cometidos por los alumnos (en la racionalización de expresiones con radicales de tercer orden)

son señales de que ellos poseen conocimiento matemático? (Lyndon, 2000).

El procedimiento estadístico fue efectivo porque permitió alcanzar los objetivos propuestos:

- Indagar por los conocimientos iniciales que los alumnos tienen sobre la racionalización de expresiones con radicales de tercer orden.
- Identificar los errores matemáticos conceptuales y algorítmicos que cometen los alumnos en la racionalización de expresiones con radicales de tercer orden.
- Jerarquizar los errores matemáticos conceptuales y algorítmicos que cometen los alumnos al racionalizar expresiones con radicales de tercer orden.
- Comparar el aprendizaje de los alumnos al utilizar los errores matemáticos como medio didáctico para el aprendizaje de la racionalización de expresiones con radicales de tercer orden con otro grupo al que se le enseña sin la metodología del error.

Sin embargo, para no quedarnos sólo en la parte cuantitativa, se aplicó un cuestionario tipo Lickert a los alumnos del grupo experimental para saber sus percepciones u opiniones sobre el procedimiento de aprender a racionalizar a partir de sus errores. Como se observa en los resultados de las encuestas, hay un alto grado de

favorabilidad al cuestionario formulado. Específicamente las respuestas fueron muy favorables en cuanto a que a partir de aprender de los errores los alumnos consolidaron más sus conocimientos. La favorabilidad estuvo repartida en muy favorables en **62.1%** y favorables en **37.9%** (Ver anexo 1 y 2).

También se observó comentarios con alta favorabilidad sobre la pregunta si la metodología de la enseñanza a partir del error llenó las expectativas de los alumnos; **86.2%** respondieron muy favorables y **13.8%** respondieron favorablemente.

Finalmente, los alumnos opinaron muy favorablemente sobre la afirmación "de los errores también se aprende". **89.7%** opinaron muy favorablemente y **10.37%** opinaron favorablemente (Ver anexo 1 y 2).

De manera que la investigación tanto en lo cuantitativo como en lo cualitativo ofreció una coherencia a partir de los objetivos planteados y la hipótesis formulada.

Logros obtenidos

- Como se esperaba, se logró de los alumnos un mejor aprendizaje de la racionalización de radicales de tercer orden a partir de los errores cometidos por los alumno.
- Se generó en los estudiantes una mayor confianza para aprender a partir de la implementación de la metodología socrática.
- Se amplió el banco de datos

sobre los errores que cometen los alumnos al racionalizar expresiones con radicales de tercer orden, pues aparecieron nuevos errores tanto en Pretest como en Postest y con relación a una investigación similar realizada por el autor con un diseño diferente.

- Se motivó la toma de conciencia de los alumnos sobre los errores que cometen al racionalizar, para que a partir de ese proceso cognitivo racionalicen mejor.
- Se logró aumentar la autoestima del alumno.
- Se logró una mayor participación de los alumnos con este procedimiento metodológico.
- Se logró sistematizar un problema en el aula de clase y su manera de resolverlo, para mostrarlo como ejemplo a redes de investigadores sobre el tema.

Referencias

- BACHELARD, G. (1988)
La formación del espíritu científico. México: Siglo XXI.
- BELL, A. (1987)
Diagnostic teaching 1-3. Mathematics Teaching, 115, 116, 118.
- BORASSI, R. (1994)
Capitalising on errors as "springboards" for inquiry. A teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(2), 166-208.

DE ZUBIRÍA, M. (1998)

Diseño innovador de asignaturas. Seis didácticas revolucionarias para enseñar conceptos. Bogotá: Fundación Alberto Merani.

GOMEZ, P. & MESA, M. (1994)

Aprendizaje del Álgebra. Bogotá: Una Empresa Docente. Universidad de los Andes.

LYNDON, H. (1995)

Conceptual Mediation – a new approach to an old problem. *Voice – South Australia. A Journal for Educators*, 3(2). Department for Education and Children's services,

LYNDON, H. (2000)

I did it my way! An introduction to the old way/new way methodology. *Australasian Journal of Special Education*, 13(19, 32-37).

MANCERA, E. (1998)

Errar es un placer. El uso de los errores para el desarrollo del pensamiento matemático. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

RAUFF, J. V. (1994)

Constructivism, factoring and beliefs. *School Science and Mathematics*. 94(8), 421-426.

RICO, L. (1995)

Errores en el aprendizaje de las Matemáticas. En Kilpatrick, J.; Gómez, P. y Rico, L. (Eds). *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas.* Evaluación. Historia. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

SÁNCHEZ, S. GOMEZ, J. POLANCO, J &

VENEGAS, M. (1998)

Modelo geométrico para construir la ecuación de segundo grado. En *Revista EMA, Vol 4, N° 1, 32-45.* Bogotá: Una Empresa Docente. Universidad de los Andes.

ANEXO: 1

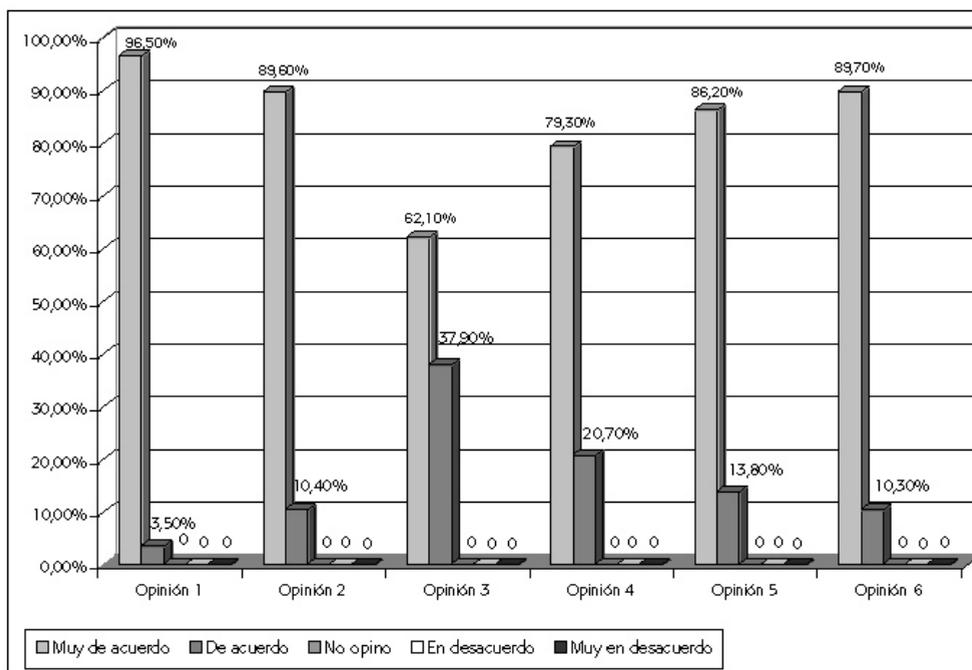
Opiniones de los alumnos sobre la enseñanza de la racionalización de radicales de tercer orden usando el error como dispositivo para aprender a racionalizar

	Opinión	Muy de acuerdo	Valor %	De Acuerdo	Valor %	Indeciso	Valor %	En desacuerdo	Valor %	Muy en desacuerdo	Valor %
1	Se hizo una prueba diagnóstica para determinar los errores de los alumnos en la racionalización de radicales	28	96.5%	1	3.5%	0	0.0%	0	0.0%	0	0.0%
2	Una vez se conocieron los errores cometidos por los estudiantes el profesor enseñó la racionalización de radicales teniendo como referencia tales errores.	26	89.6%	3	10.4%	0	0.0%	0	0.0%	0	0.0%
3	A partir de este método de aprendizaje considera usted que su conocimiento al afrontar ejercicios de racionalización de radicales se ha consolidado más.	18	62.1%	11	37.9%	0	0.0%	0	0.0%	0	0.0%
4	Esta manera de aprender a través de los errores que se cometen durante el desarrollo de la racionalización de radicales le aportó positivamente en el proceso de solución de estos ejercicios	23	79.3%	6	20.7%	0	0.0%	0	0.0%	0	0.0%

5	Considera usted que este método de enseñanza llena sus expectativas.	25	86.2%	4	13.8%	0	0.0%	0	0.0%	0	0.0%
6	De errores también se aprende.	26	89.7%	3	10.3%	0	0.0%	0	0.0%	0	0.0%

ANEXO: 2

Gráfico consolidado de las opiniones de los alumnos sobre la enseñanza de la racionalización de radicales de tercer orden usando el error como dispositivo didáctico para aprender a racionalizar



ANEXO: 3

PRETEST

Resuelva las siguientes racionalizaciones conscientemente.

Tiempo máximo: 30 minutos

1- Racionalizar el denominador de $\frac{1}{\sqrt{x}}$

2- Racionalizar el denominador de $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

3- Racionalizar el denominador de $\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$

4- Racionalizar el denominador de $\frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$

5- Racionalizar el denominador de $\frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}}$

6- Racionalizar el denominador de $\frac{1}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}}$

ANEXO 4 :

POSTEST

Resuelva las siguientes racionalizaciones concientemente.

Tiempo máximo: 30 minutos

1- Racionalizar el denominador de $\frac{1}{\sqrt{x}}$

2- Racionalizar el denominador de $\frac{1}{\sqrt{x}+5}$

3- Racionalizar el denominador de $\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

4- Racionalizar el denominador de $\frac{1}{\sqrt{x}+3}$

5 -Racionalizar el denominador de $\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$