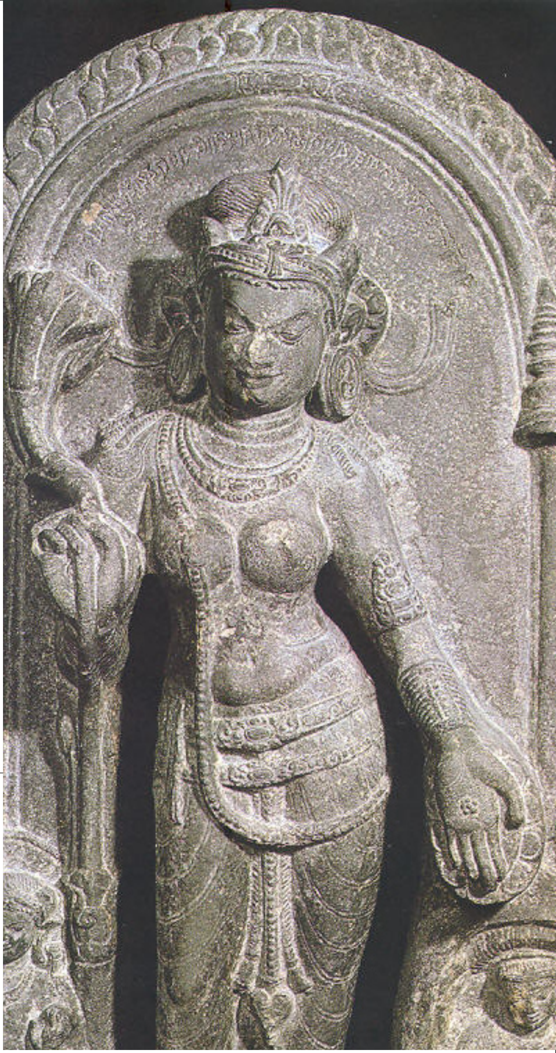
ARTÍCULO DE INVESTIGACIÓN

zona próxima

La calculadora: Una fuente de exploraciones conceptuales

María M. Viñas de la Hoz
Patricia Navarro
Eugenio Ortega Collante



La diosa Tara, s. IX d. J.C.

zona próxima

Revista del Instituto
de Estudios Superiores
en Educación
Universidad del Norte

nº 5, diciembre, 2004
ISSN 1657-2416

MARÍA M. VIÑAS DE LA HOZ
UNIVERSIDAD DEL NORTE
DIRECCIÓN POSTAL: A.A. 1569, BARRANQUILLA (COLOMBIA)
(mvinas@uninorte.edu.co)
PATRICIA NAVARRO
ESCUELA NORMAL SUPERIOR SANTA ANA
EUGENIO ORTEGA COLLANTE
ESCUELA NORMAL SUPERIOR LA HACIENDA

RESUMEN

Este artículo describe las ventajas que brinda el dominio de la tecnología, representada por la calculadora TI 92 Plus, en el desarrollo del razonamiento matemático, específicamente del pensamiento variacional. Como ejemplo se analiza el trabajo realizado con dicha calculadora por dos grupos de estudiantes de noveno grado de secundaria, consistente en la resolución de problemas sobre funciones cuadráticas. Empleando los recursos dinámicos de la calculadora realizaron múltiples exploraciones conducentes a la búsqueda de soluciones. La posibilidad de interactuar con diferentes registros de representación, fue la clave para lograr en los estudiantes la fluidez representacional que facilitó la construcción y articulación de conceptos matemáticos.

PALABRAS CLAVES: Razonamiento matemático, pensamiento variacional, conceptos matemáticos.

ABSTRACT

This article describes the advantages obtained when using technology, such as Calculator TI 92 Plus, in the development of mathematical reasoning, specifically of variational thinking. As an example, it is analyzed the work carried out by two groups of ninth grade students by using the calculator. The work consisted of solving problems about quadratic functions. By using dynamics resources from the calculator, they carried out multiple explorations leading to search solutions. The possibility of interacting with different registers . of representation was the key for students to achieve the representational fluidity, which facilitated the construction and articulation of mathematical concepts.

KEY WORDS: Mathematical reasoning, variational thinking, mathematical concepts.

FECHA DE RECEPCIÓN: AGOSTO DE 2004
FECHA DE ACEPTACIÓN: NOVIEMBRE DE 2004

1 Introducción

La incorporación de las tecnologías de la información en el mundo moderno ha reorganizado la vida de los pueblos. El crecimiento de éstos se mide con relación a los avances en materia de ciencia y tecnología. Estos avances repercuten en todas la ramas del saber, específicamente en lo concerniente a las matemáticas, las cuales constituyen el lenguaje universal de las ciencias. El desarrollo del pensamiento matemático se manifiesta en el desarrollo del pensamiento constructivo y sistemático del género humano, razón primordial para que los sistemas educativos se preocupen por la construcción de los conceptos matemáticos, por la forma como los aprendices acceden a ellos y por cuáles serían los mejores recursos para dinamizar su aprendizaje.

La escuela, por consiguiente, debe permanecer atenta a los desarrollos tecnológicos y darse a la tarea de realizar una revisión de los métodos tradicionales de enseñanza para ver qué tanto se está promoviendo el desarrollo del pensamiento. En ese sentido, debe dirigir su mirada hacia el uso de herramientas computacionales en el aula de clase, las cuales han demostrado su efectividad, para dinamizar al máximo la actividad cognitiva de los educandos. En cuanto al desarrollo del pensamiento matemático, es tarea imperativa de la escuela organizar el currículo de manera que incorpore los recursos que brindan las nuevas tecnologías en la construcción y comprensión de los conceptos matemáticos de una manera integrada alrededor de problemas y no como tradicionalmente se ha venido haciendo, por contenidos temáticos aislados.

Como una contribución a la reflexión sobre esta nueva forma de organización, en este artículo se presenta una experiencia de aula en la cual alumnos de grado noveno se enfrentan a la solución de dos problemas que giran alrededor de situaciones de variación y cambio. Empleando los recursos expresivos de la calculadora TI 92 Plus como, instrumento de mediación para el desarrollo del pensamiento matemático, realizaron múltiples exploraciones que derivaron en la construcción del modelo matemático de la función cuadrática.

2 Marco teórico

Entre los aspectos que generan una nueva visión de la Educación Matemática establecidos en los Lineamientos Curriculares del MEN (2001) se recomienda el uso de la Tecnología, representada por las calculadoras y los ordenadores, como herramientas para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Con el empleo de estos medios computacionales, los estudiantes tienen mayor posibilidad de explorar y analizar representaciones y hacer conjeturas cuando resuelven problemas.

Igualmente, en los «Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática» (NCTM, 2000) se hace un llamado para que en todos los programas de Matemáticas se enfatice en:

- crear y usar representaciones para organizar, registrar y comunicar ideas matemáticas;
- seleccionar, aplicar y traducir en representaciones matemáticas la solución de problemas;
- usar representaciones para modelar e interpretar matemáticamente fenómenos de las ciencias naturales y sociales (p.67)

El interés por el estudio de las representaciones en la Educación Matemática ha llevado a muchos investigadores a estudiar el papel que juegan en el desarrollo del pensamiento matemático de los que aprenden. Así, por ejemplo, Pape y Tchoshanov (2001: 124) realzan el rol de las representaciones en el entendimiento de las matemáticas, como herramientas para desarrollar la actividad cognitiva, dado que permiten a los individuos explicar o justificar un argumento, obtener resultados intermedios en un problema, formular ideas y realizar inferencias. Las representaciones, entendidas en el ámbito de las matemáticas como notaciones simbólicas, gráficas o verbales, mediante las cuales se expresan los conceptos y procedimientos en esta disciplina, así como sus características y propiedades más relevantes (Lupiañez & Moreno, 2001), deben ser pensadas como herramientas para la actividad matemática, más que como productos, o resultados finales de una tarea.

Representaciones como numerales, ecuaciones algebraicas, gráficas, tablas y diagramas se convierten en el medio externo para «manipular» los conceptos matemáticos. Actúan como estímulos a los sentidos y nos ayudan a entender tales conceptos (Janvier, Girardon & Morand, 1993: 81). A través de estas experiencias se desarrollan esquemas cognitivos y surgen las representaciones internas que constituyen las ideas matemáticas abstractas.

Duval (1999), por su parte, avanza en la identificación de la utilidad de las representaciones en la conceptualización en matemáticas, al advertir que más allá de la actividad en cada uno de los registros de representación, están las conexiones entre estos registros, para lograr una mayor comprensión en matemáticas. En las experiencias de clases, los alumnos deben interactuar con diversos registros de representación y lograr la coordinación entre ellos.

Las calculadoras TI 92 Plus, mediante sus representaciones ejecutables, se constituyen en fuente de exploraciones conceptuales, prepara el camino para dar paso a generalizaciones, sistematizaciones y abstracciones matemáticas, y proporcionan un manejo más versátil y articulado de los conceptos matemáticos. La posibilidad de poder construir y relacionar diferentes registros de representación: simbólico, gráfico, numérico, tabular de una función, impulsa el desarrollo de los pensamientos: numérico, espacial, métrico, variacional y analítico, modalidades del pensamiento matemático que deben desarrollarse durante el quehacer escolar (MEN).

En el caso del aprendizaje de las funciones, desde una perspectiva variacional, algunos autores (Heugl, 1998; Cuoco & Goldenberg, 1996; Azcárate & Deulofeu, 1996) proponen enfatizar en los registros gráficos y tabulares, pues éstos propician el análisis del fenómeno de cambio en cuestión, lo cual favorece la identificación de las magnitudes variables, las relaciones de dependencia entre ellas y la cuantificación posterior.

3 Descripción de la experiencia

El estudio que se describe hace parte de las actividades realizadas en la fase piloto del proyecto «Incorporación de nuevas tecnologías al currículo de matemáticas de la educación básica secundaria y media de Colombia», liderado por el MEN desde el 2000.

Este proyecto se llevó a cabo con dos grupos de estudiantes de noveno grado de las escuelas normales La Hacienda de Barranquilla y Santa Ana de Baranoa. El propósito radicaba en analizar qué tanto se favorecía el desarrollo del pensamiento matemático variacional con el apoyo de la calculadora TI 92 Plus mediante la realización de actividades propuestas a grupos de dos estudiantes en cada uno de los cursos. Al final de cada sesión se realizó una puesta en común, para socializar las dificultades, los hallazgos y resultados de los grupos. Cabe advertir que la mayoría de los alumnos tenían ya un manejo operativo de la calculadora, y habían realizado otras actividades similares.

Las actividades que fueron propuestas a cada grupo, a modo de resolución de problemas, se enmarcan en el estudio de algunos modelos de función cuadrática, con el pretexto de buscar el rectángulo de área máxima a partir de una determinada situación problema. Se invitó a los estudiantes a que emplearan los múltiples recursos brindados por la calculadora, para obtener diferentes registros de representación de la situación: figuras geométricas, lugares geométricos, tabla de valores, gráfica cartesiana, expresión simbólica, traducción simbólica correspondiente al problema, con el fin de que pudiesen desarrollar exploraciones del fenómeno y realizar traslados de un registro de representación a otro.

Se pretendía lograr una articulación entre las diferentes representaciones correspondientes a los conceptos que se movilizaban en cada actividad: variación, dependencia entre variables, lugar geométrico, función cuadrática y su gráfica, simetría, valor máximo y otros más.

A continuación se presenta cada problema, se describen algunos momentos relevantes de la intervención de los profesores y se analizan los resultados en términos de la ganancia en la fluidez representacional y, por consiguiente, en la fluidez conceptual.

4 Resultados

Problema 1

Dado un segmento AB de 3 cm de longitud, coloca un punto P sobre él y construye un rectángulo cuyas dimensiones sean las longitudes AP y PB. Analiza la variación de su área cuando el punto P se desplaza sobre el segmento AB y elige las dimensiones del rectángulo de mayor área.

Inicialmente, algunos estudiantes propusieron representaciones con papel y lápiz para formarse una idea de lo propuesto en el problema. Algunos de ellos respondieron desprevenidamente que cuando el rectángulo fuese un cuadrado, el problema estaría resuelto, por lo que se les sugirió que justificaran su afirmación. Se pretendía que realizaran múltiples exploraciones con la calculadora, para que refinaran sus justificaciones en torno al estudio de la parábola representativa de la función que relacionaba el área del rectángulo con la longitud del lado. La mayoría de los estudiantes hicieron la construcción que se muestra en la figura 1 con algunas sugerencias dadas por los profesores.

Lo más novedoso de la representación para ellos fue la

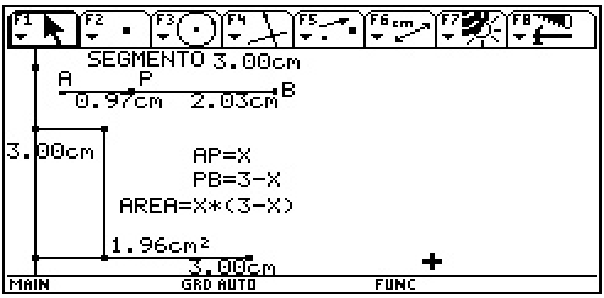


Figura 1

exploración que pudieron hacer de los distintos rectángulos obtenidos a partir del movimiento del punto P sobre el segmento AB. Estas exploraciones les permitieron atender a la variación e identificar la relación funcional entre el área del rectángulo y la longitud del lado. Observaron que variando la posición de P variaban las dimensiones del rectángulo y su área. El análisis de esta relación les permitió conjeturar sobre el rectángulo de área máxima, según lo que observaban en la pantalla. Afirmaciones como: «cuando P se encuentra en la mitad del segmento se obtiene el rectángulo de mayor área» y «antes de llegar al punto medio del segmento, el área es más pequeña y después, se nota más grande», permiten confirmar este hecho.

Después de la exploración inicial se les pidió que asignaran variables a las magnitudes lado del rectángulo (x) y área del rectángulo (A) y transfirieran las medidas en un sistema de ejes coordenados para representar con el par ordenado (x, A) la variación del área en función del lado, cuando el punto P se mueve a lo largo del segmento AB. El recurso de dejar la huella del punto (x, A) al hacer la t animación de P, les permitió observar la gráfica de la dependencia. Además, contaban con el recurso de trazar el lugar geométrico de los puntos (x, A), y por lo tanto lo trazaron también. Como hasta el momento los alumnos sólo habían realizado actividades relativas a funciones lineales, se sorprendieron al ver la curva generada. La actividad se constituyó en una oportunidad para introducirlos en el estudio de las funciones cuadráticas. El interés radicaba en que lograran hacer las traslaciones de un registro de representación a otro, para ganar en comprensión integral del fenómeno (figuras 2 y 3).

Se les preguntó nuevamente acerca del punto máximo de la curva,

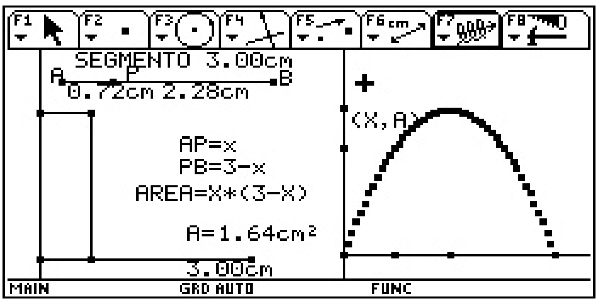


Figura 2

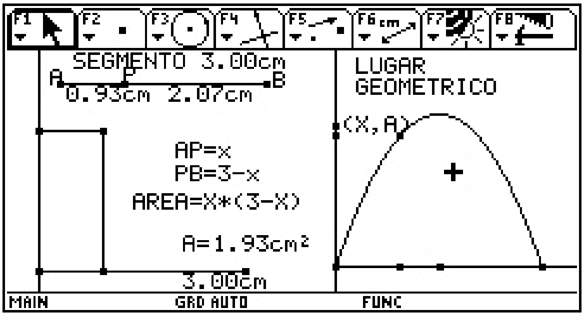


Figura 3

en qué valor de x ocurría, en qué posición se encontraría el punto P sobre el segmento y qué propiedades adicionales debía tener el rectángulo Algunos alumnos comprobaron que el máximo valor del área se obtenía en el punto medio del segmento determinado por los puntos de corte de la gráfica con el eje horizontal. Se aprovechó la situación para introducir intuitivamente el concepto de máximo de la función, sin tener los estudiantes conocimiento alguno de cálculo. Se les sugirió además que verificaran la simetría con respecto al eje de la parábola; para lo cual trazaron en el eje horizontal un segmento de 3 cm de longitud y en su punto medio levantaron una perpendicular. Colocaron un punto M en el lugar geométrico y buscaron su simétrico N (figura 4).

Para realizar el registro tabular se pidió a los alumnos valerse de la animación del punto P, hacer un registro en el editor de datos, con el fin representar estos puntos gráficamente y ver qué analogía guardaba esta representación con la gráfica trazada por el lugar geométrico (figura 5).

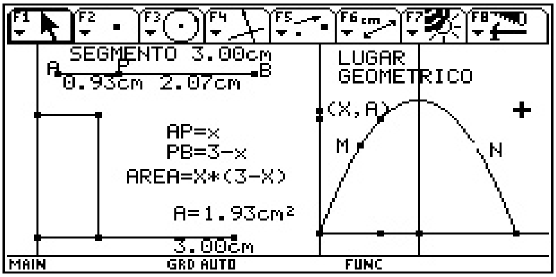


Figura 4

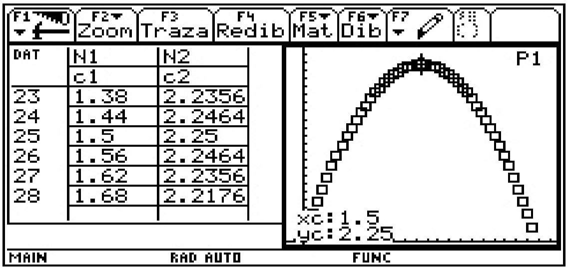


Figura 5

Al poder observar simultáneamente los registros tabular y gráfico, los alumnos comprobaron que a cada pareja de valores (x, A) le correspondía un punto y en el plano y que la unión de todos estos puntos formaba una curva similar a la obtenida en el registro anterior. Observaron que los puntos ya no se presentaban alineados, como ocurría en la gráfica de la recta. Lo más interesante fue que llegaron a establecer una correlación entre los registros del mismo fenómeno realizados hasta el momento: el registro verbal o escrito los llevó a la representación geométrica del problema; éste, a su vez, a establecer relación de dependencia entre las variables x y A; los puntos correspondientes a estas parejas trazaron un lugar geométrico; el registro tabular de estos datos permitió trazar una gráfica similar a la anterior. En la tabla de datos pudieron nuevamente comprobar sus conjeturas acerca del rectángulo de área máxima. Hacer el traslado de un registro de representación a otro de la misma función les ayudaba a adquirir conocimiento adicional de ella.

Finalmente, para vincular las representaciones usadas hasta el momento, con el registro simbólico, se les solicitó que formularan la ecuación del área del rectángulo. Hicieron la representación simbólica como el producto de su base por su altura, es decir: $A = x*(3-x)$, y realizaron las operaciones algebraicas hasta obtener $A = -x^2+3x$. Este resultado les alertó sobre la presencia del término cuadrático. Se les solicitó introducirla en el editor de funciones para que la calculadora trazara su gráfica cartesiana y así proceder a compararla con las gráficas obtenidas anteriormente (figuras 6 y 7).

Para confirmar sus hallazgos, algunos estudiantes también utilizaron la herramienta «máximo». Otros utilizaron el recurso de la división de pantalla para mirar al mismo tiempo la tabla de valores y la gráfica cartesiana; aun más, pudieron cerciorarse, usando el comando «Trace», que los puntos correspondían a parejas de

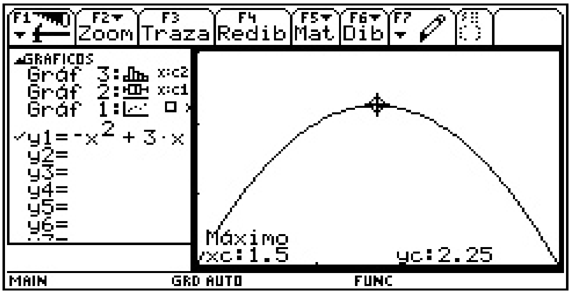


Figura 6

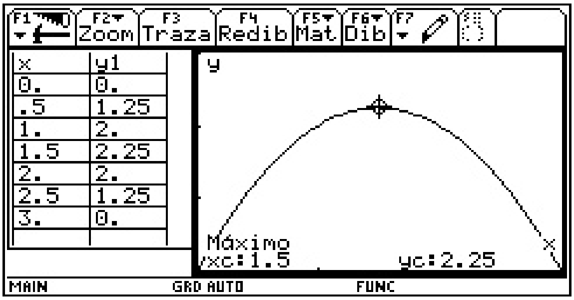


Figura 7

valores relacionadas en la tabla. De esta manera, confirmaron que sus conjeturas acerca del máximo valor del área del rectángulo eran válidas. Hicieron además la comparación con la ecuación de primer grado y = 3-x referente a una de las dimensiones dada en términos de la otra y establecieron sus diferencias en cuanto al grado y a las características de sus gráficas (figura 8). A menudo, los alumnos tienen la tendencia a creer que todas las gráficas corresponden por lo general a líneas rectas.

Algunas conclusiones finales que consignaron en sus cuadernos de trabajo (como la que se presenta abajo), permitieron confirmar que la calculadora jugó un papel primordial en el trabajo de introducción a las funciones cuadráticas, permitiéndoles obtener, a través de las múltiples representaciones del mismo fenómeno, una globalización de los conceptos involucrados.

Al realizar el problema pude sacar toda clase de conclusiones con respecto a su gráfica, los datos y otras

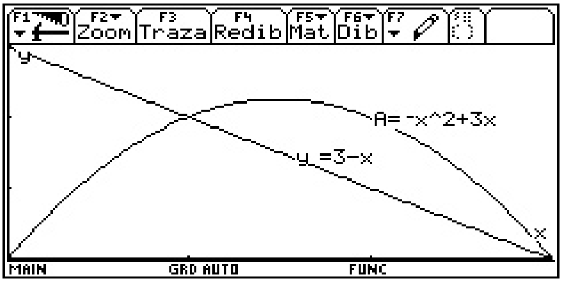


Figura 8

características que de pronto con lápiz y papel normalmente no se podrían hacer; me di cuenta que su gráfica perfectamente era una parábola, con su punto máximo bien calculado.

La calculadora nos brinda diferentes maneras de llegar a un objetivo, sea cual sea; si es posible, la acción. Por esto, debo conocer todas las opciones que nos brinda para resolver los problemas.

Problema 2

Encontrar las dimensiones del rectángulo de área máxima que se puede inscribir en triángulo rectángulo cuyos catetos miden 2 y 3 cm, como se muestra en la figura 9.

El avance en las estrategias de solución al enfrentarse a este segundo problema fue evidente. Se vio la diferencia en las etapas del proceso presentadas por las parejas de estudiantes. Todos hicieron sin dificultad la construcción geométrica.

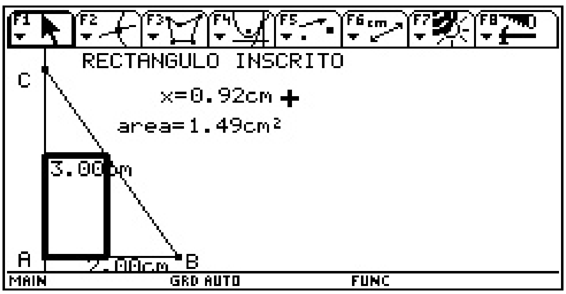


Figura 9

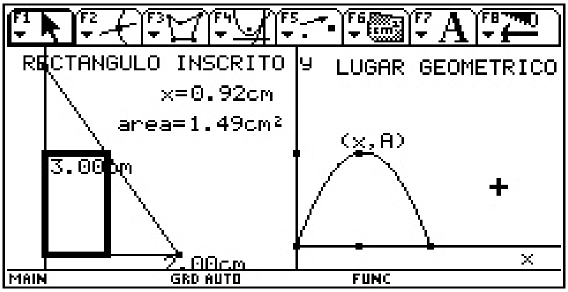


Figura 10

Algunos, primero tabularon y representaron los datos, otros, trazaron el lugar geométrico de los puntos (x, A), (figura 10), y era claro para ellos la relación de dependencia entre el área y la medida de uno de los catetos del triángulo rectángulo inscrito; pero la gran mayoría tuvo dificultades en la formulación simbólica de la función área, que requería establecer la ecuación de uno de los catetos en términos del otro, bien sea usando la proporcionalidad entre lados correspondientes de triángulos semejantes, o definiendo la ecuación de una recta que pasara por los vértices B y C. No tuvieron en cuenta la opción de colocar el rectángulo en un sistema de ejes coordenadas y pedirle a la calculadora la ecuación de la recta que pasaba por los vértices B y C (figura 11), y de esta manera formular la función área:

$$A = x*(-1.5x+3) = -1.5x^2 +3x$$

y observar las características de la nueva ecuación. Aquí se requirió la intervención de los profesores para que los alumnos pudiesen lograr la

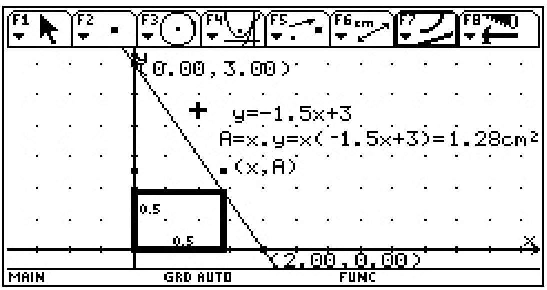


Figura 11

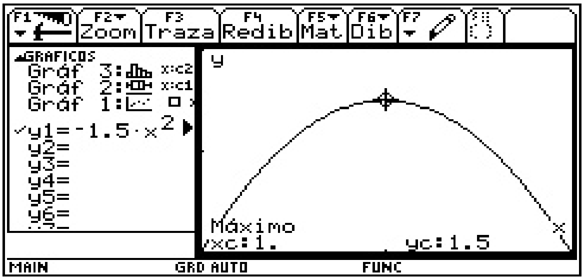


Figura 12

formulación de la función cuadrática de área, y así obtener su gráfica cartesiana (figura 12).

Conclusiones

Aunque estos resultados no son definitivos, porque dependen del tipo de actividades propuestas a los estudiantes, se exponen con el ánimo de mostrar las fortalezas y dificultades que presentaron en el aula de clases durante su trabajo con calculadoras. Son resultados de la búsqueda continua que los docentes estamos obligados a realizar en favor del fortalecimiento de la actividad cognitiva de los educandos en el aprendizaje de las matemáticas. Consideramos que esta experiencia se constituye más que todo en una propuesta metodológica para desarrollar en el aula, como introducción al tratamiento de funciones cuadráticas.

Para nosotros fue clave la oportunidad brindada por la calculadora TI 92 Plus para construir los diferentes registros de representación de funciones cuadráticas, envueltas en dos problemas similares, relativos a la búsqueda de rectángulos de área máxima y a establecer conexiones entre ellos. La calculadora les permitió a los estudiantes realizar un cúmulo de exploraciones que facilitaron aproximaciones a la búsqueda del rectángulo de área máxima. Pudieron ampliar la visión de las funciones, que a veces son reducidas a una simple fórmula, valorar los recursos de las gráficas y tablas para establecer conclusiones acerca del comportamiento de la funciones. Aunque el contexto de los problemas imponía restricciones al primer cuadrante, consideramos que de esta manera se hacía más significativo el sentido de dependencia entre variables dada la situación concreta: lado-ÁREA, relación que posteriormente traducían simbólicamente en un modelo funcional cuadrático. A pesar de que en el segundo problema se les dificultó la formulación de la función área, esto nos dio pautas para hacer una revisión profunda acerca de cómo los estudiantes habían abordado anteriormente temas, entre otros, la semejanza de triángulos, la pendiente de una recta, los cuales eran prioritarios para establecer relaciones en la construcción del área.

Queremos enfatizar en el rol que los docentes debemos asumir en cuanto a la elección de actividades para trabajar con la calculadora que permitan promover ganancia en fluidez conceptual y algorítmica en el trabajo matemático. Esta tarea exige una revisión de los métodos tradicionales de enseñanza de las matemáticas sin ayuda de calculadoras graficadoras y algebraicas, profundizar en el currículo de matemáticas en general y contemplar la posibilidad de incorporar gradualmente el uso de estos recursos computacionales para contribuir a la creación de una cultura informática en la escuela.

Referencias

AZCÁRATE, C. & DEULOFEU, J. (1996)
Funciones y Gráficas. Madrid: Síntesis.

CUOCO, A. & E.P. GOLDENBERG (1996)
"Dynamic geometry as a bridge from Euclidean geometry to analysis." In Schattschneider, D. and J. King (Eds.), *Geometry Turned On: Dynamic Software in Learning, Teaching, and Research*. MAA Notes, volume 41. Washington, DC: Mathematics Association of America.

DUVAL, R. (1999)
Semiosis y Pensamiento humano, registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Traducción al español de Myriam Vega. Universidad del Valle. Primera edición. Santiago de Cali. P 314

HEUGL, H. (1998, November)
The influence of Computeralgebra Systems in y the Function concept. ICTM conference, New Orleans.

JANVIER, C., GIRARDON, C., & MORAND, J. (1993)
Mathematical symbols and representations. In P. S. Wilson (Ed.), *Research ideas for the classroom: High school mathematics* (pp. 79-102). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

LUPIAÑEZ, J. & MORENO, L. (2001)
Tecnología y representaciones semióticas en el aprendizaje de las matemáticas. Estudios de Doctorado: Iniciación a la investigación en Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (2001)
Lineamientos Curriculares. Matemáticas. Áreas Obligatorias y Fundamentales. Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos, p.72.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (2000)
Principies and Standards for school mathematics. Reston, VA: Author.

PAPE, S. J., & TCHOSHANOV, M. A. (2001)
"The role of representation(s) in developing mathematical understanding". Theory into Practice, 40(2), 118-125.